БИБЛИОТЕЧКА
ФИЗИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ШКОЛЫ

МАТЕМАТИКА

Н. И. КОВАНЦОВ

МАТЕМАТИКА И РОМАНТИКА

БИБЛИОТЕЧКА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
МАТЕМАТИКА

Н. И. КОВАНЦОВ

МАТЕМАТИКА И РОМАНТИКА

Издательское объединение «Вища школа»
Головное издательство
Киев — 1976

51
К56

УДК 51(023.11)

Математика и романтика. Кованцов Н. И. Издательское объединение «Вища школа», 1976, 96 с.

В книге рассказывается о том, как, следуя внутренним законам развития, математическая мысль пришла от попыток решения великих задач древности к замечательным открытиям последующих времен (конические сечения, метод координат, решение алгебраических уравнений в радикалах, теорема Руффини — Абеля, теория Галуа и т. д.). Математические рассуждения перемежаются беллетризованными историко-математическими фактами (Анаксагор в темнице, юность Архимеда и его гибель, Декарт на пиратском корабле, диспут между Тартальей и Феррари и др.). «Сухая» математика соседствует со стихотворными отрывками из художественных произведений.

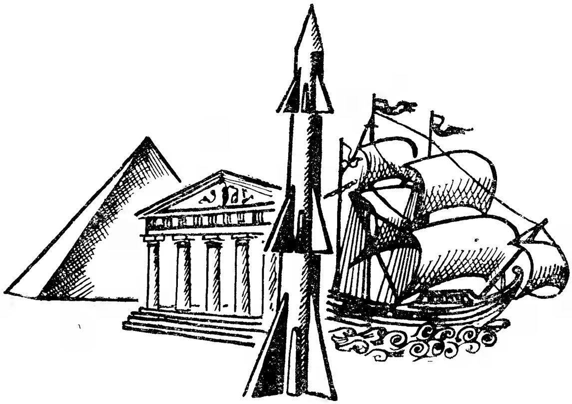
За исключением отдельных мест (поля, группы, расширения, решение уравнений в радикалах), изложение всюду элементарно.

Книга рассчитана на учащихся физико-математических школ. Она может быть полезной старшеклассникам общеобразовательных средних школ и всем любителям математики и ее истории.

Ил. 28. Список лит.: 12 назв.

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *А. С. Макуха*

$К \frac{20201-252}{М211(04)-76} 159-76$



Дорогие друзья! С малых лет каждый из вас изучает математику. Кто — с интересом, кто — с безразличием. Правда, если вы учитесь не только в обычной, но и в специализированной физико-математической школе, то, надо полагать, занимаетесь вы математикой не по принуждению, а по внутреннему влечению. Однако — и те, кто учится лишь в одной школе, и те, кто совмещает эту учебу с учебой в специализированной школе, — всегда ли вы отдаете себе отчет в том, чем именно привлекает вас математика, или, наоборот, чем она отвращает вас от себя?

Можно любить науку за строгую согласованность ее истин, за ее силу и за ее многогранность, можно, наоборот, питать нелюбовь к ней за ее сухость и за ее кажущуюся ненужной сложность, за немотивированную искусственность ее построений и т. д. Но эта любовь и эта нелюбовь будут представлять собой нечто поверхностное и непрочное, что-то случайное и необязательное, если от вас ускользнет то, что можно было бы назвать душой науки, ее умом и ее интеллектом, ее духовной красотой и ее гармонической утонченностью. Мы намеренно воспользовались терминами, характерными при оценке человеческой личности, так как именно такой личностью, целостной и бесконечно интересной, должна предстать перед вами наука, чтобы вы по-настоящему могли почувствовать, что она такое есть.

В книге, которую вы сейчас держите в руках, сделана попытка представить математику в ее особом романтически приподнятом духе, представить ее своеобразную душу, слившуюся с трепетными образами тех, кто ее творил и кто ею жил. Если тот из вас, кто любил математику прежде, полюбит ее еще больше, — цель наша достигнута. Если же у кого-то, не любившего ее, останется чувство неприязни и безразличия к ней и сейчас, то и это — не трагедия — математика совсем не единственный объект, на который могут быть устремлены ваши помыслы, лишь бы они были, эти помыслы.

Академик А. Д. Александров и студенты

Несколько лет назад на страницах «Комсомольской правды» развернулась интересная дискуссия. И вот по какому поводу. Студенты МВТУ им. Баумана обратились через газету к студентам Московского университета с предложением начать разговор о том, кто из них чем занимается. Приходите к нам — говорили будущие техники,— расскажите, над чем думаете. А мы придем к вам, расскажем о том, что интересует нас. Будет интересно и вам, и нам.

На это студенты университета — будущие ученые — глубокомысленно ответили: «Прийти-то, конечно, можно, можно и рассказать, можно и послушать, но вот в чем вопрос — зачем это вам или нам нужно? Какую мы будем иметь от этого пользу?»

В разговор вмешался А. Д. Александров, человек в высшей степени остроумный и интересный. «Ты смотри, какие мудрецы,— сказал он по поводу ответа будущих ученых.—Все-то они хотят заранее предусмотреть, все-то подсчитать. И если реальной материальной пользы от разговора не будет, то незачем-де его и начинать. Ну, прямо, столпы прагматизма и вселенской целесообразности». (Может быть, и не такими точно словами говорил академик, но смысл его слов был именно таким). «А я бы вот,— продолжал он,— не стал сушить себе голову над выяснением того, для чего мне то или иное знание нужно.

Хочу знать — и весь сказ. Просто так! Потому что это — моя жизненная потребность, потому что без этого мне жизнь — не в жизнь. Хочу знать потому, что не могу не хотеть этого».

Вот как, оказывается, можно смотреть на вещи. Знать, знать, знать... Знать как можно больше, знать как можно глубже. Жить интереснее, когда каждый день можно узнавать что-то новое. Говорят, римский император Тит считал потерянным тот день, когда он не творил добрых дел. Сомнительно, был ли он в действительности таким добротворцем, каким хотел себя представить, но для нас должна быть совершенно непреложной истина — для нового человека потерян тот день, когда он не узнает чего-то нового.

Передают слова Валерия Брюсова, говорившего, что, если бы ему было отпущено шесть жизней,— их не хватило бы для того, чтобы утолить ту безмерную жажду познания, которой он был одержим. А Отто Юльевич

Шмидт составил себе такую жизненную программу, для выполнения которой понадобилось бы несколько сотен лет. С болью в сердце вынужден был ученый выбрасывать из нее целые куски, сокращать до минимума другие, отрывать время от сна, отдыха и т. д. Да разве только Шмидт?!

Зачем нужно учиться, напрягать свой разум, тратить колоссальные усилия, когда не учась или учась намного меньше, можно получить такую же или даже еще большую зарплату? А затем, очевидно, что очень уж различна жизнь у того, кто меряет ее на рубли, и у того, кто измеряет ее интеллектуальными ценностями.

Вот как писал великий Данте в своей бессмертной поэме:

Тот жалкий срок, пока еще не спят
Земные чувства, их остаток скудный
Отдайте постиженью новизны,
Чтоб солнцу вслед увидеть мир безлюдный.
Подумайте о том, чьи вы сыны!
Вы созданы не для животной доли,
А к доблести и к знанью рождены!

Не надо думать, что в этом содержится призыв к этакому бездумному всеядничеству, к полнейшей бессребрености. Нет, нет и нет. Наука сейчас, как никогда ранее, является материальной силой общества. Измерять результаты научных достижений рублем не только не постыдно, но и нужно. Ведь и рубль-то этот нужен лишь потому, что помогает сделать жизнь полнее и интереснее. Когда же удовлетворены материальные потребности, начинают выступать на первый план потребности духовные. И удовлетворять эти потребности можно уже не только через посредство рубля, но и непосредственно, что намного интереснее. Тогда наука становится романтичной, поэтичной и величественной, как величественны в своем стремлении ввысь шпили сказочно прекрасных средневековых готических соборов. «Когда смотришь извне на эти готические соборы,— писал Г. Гейне в своей «Романтической школе»,— эти громадные сооружения, такие воздушные, такие легкие, изящные, прозрачные, будто вырезанные из бумаги, будто какие-то брабантские кружева из мрамора,— тогда еще сильнее ощущаешь всю мощь этого времени, сумевшего даже камнем овладеть настолько, что он является нам почти в призрачном одухотворении».

Темница у моря В лето ... года от первой олимпиады Анаксагор был брошен в темницу. Философ помимо своей воли оказался втянутым в недостойную политическую борьбу. Повод был поистине смехотворным: ученый утверждал, что Солнце, лучезарное дневное светило, вовсе не бог Гелиос, а раскаленный шар величиной с полуостров Пелопоннес. В действительности же причина была совсем иной. Анаксагор был другом и учителем когда-то всесильного, но начинающего терять свою власть вождя афинского демоса и стратега Перикла. Для того чтобы свалить политического противника, не погнушались никакими средствами. Философ допустил неосторожное выражение? Предать его суду, упрятать за решетку, доказать, что его преступление достойно смертной казни! Перикл не останется безучастным к судьбе своего друга. В сложных сетях политических интриг можно будет запутать и Перикла и в конце концов вырвать у него власть.

Есть ли, однако, на земле силы, способные подавить дух вольнодумца и вольнолюбца? Можно ли заставить мыслителя не думать? Мысль всегда свободна, и на городской агоре, и за толстыми тюремными засовами...

Анаксагор стоит у зарешеченного толстыми прутьями окна тюремной камеры, и перед его мысленным взором бесконечной чередой, сменяя друг друга, проплывают картины как безмерно далеких, так и совсем недавних времен. Вот так же тянулось прежде, вот так же тянется сейчас ко всему равнодушное бесконечное время. День за днем, год за годом, столетие за столетием... Сухие потрескавшиеся камни тысячи лет стонут под жестоким, дико немилосердным солнцем. И море... Широкое, безбрежное море. Как одно гигантское зеркало по утрам и как мириады сверкающих зеркал в полдень, каждое из которых блестит и слепит глаз своим особенным, трепетно мятущимся зайчиком. Зеленые волны то с еле слышным плеском тихо накатываются на прибрежную гальку, то с неумолчным ревом бьются и пенятся над темными подводными скалами. Сегодня и завтра, сегодня и завтра... Всегда...

Философ отходит от окна, делает несколько шагов по камере и останавливается перед грубо вытесанным куском мрамора, заменяющим ему стол. На мраморе в различных и часто неожиданных сочетаниях углем изображены круги с вписанными в них многоугольниками, квадраты, сегменты, серпики... Несколько минут Анаксагор присматривается к этому множеству геометрических фигур, потом берет в руки уголь и в задумчивости добавляет к ним несколько линий...

Великие задачи Говорят, что, находясь в темнице, философ скрашивал томительное бездействие размышлениями над задачей о квадратуре круга и тем, что с нею связано. Это была одна из тех задач, которые последующие поколения назвали великими. Чем же примечательна эта задача, чем примечательны другие великие задачи?

Об этих задачах написаны сотни работ. В библиографическом указателе, который помещен в конце брошюры, содержатся некоторые из таких работ, мы и отсылаем к ним читателя. Сейчас же ограничимся самыми общими словами и прежде всего приведем формулировки задач.

1. Задача о квадратуре круга: требуется построить сторону квадрата, площадь которого равна площади данного круга.

2. Задача об удвоении куба: требуется построить ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного куба.

3. Задача о трисекции угла: требуется данный, но произвольный угол разделить на три равные части.

Оговоримся, однако, что если бы задачи были сформулированы точно так, как это сделано у нас, то никакими великими они бы не стали — задачи решаются множеством способов, и многие из таких способов знали уже сами греки. Нужно было не просто решить задачи, но решить, не прибегая к помощи никаких иных инструментов, кроме циркуля и линейки.

Почему греки предпочитали циркуль и линейку иным инструментам? Ответить на этот вопрос однозначно и в достаточной степени убедительно мы не можем. Потому ли, что циркуль и линейка являются наиболее простыми инструментами? Может быть и так. Однако можно указать множество иных инструментов, столь же простых, как циркуль и линейка, или почти столь же простых. С помощью некоторых из них решаются и сформулированные задачи.

Оставим этот вопрос без ответа. В соответствующей литературе можно найти попытки объяснения такой необычной симпатии греков именно к циркулю и линейке. Нас это сейчас волновать не должно. Циркуль и линейка? Пусть будут циркуль и линейка. Нас интересуют сейчас конечные результаты этого необычного пристрастия к двум указанным инструментам, а потому и к двум описываемым ими кривым — окружности и прямой линии.

Если говорить о значении решения великих задач для практики, то сразу же со всею определенностью следует сказать, что оно равно нулю. В самом деле, так ли уж важно решать эти задачи именно циркулем и линейкой? Не проще ли сделать это иными инструментами? Однако оказалось, что именно в бесчисленных попытках решить задачи циркулем и линейкой было получено столько важного для математики, причем именно такого важного, которое имеет уже непосредственное практическое значение, что практическая важность самих задач (если ее все же постараться усмотреть) отступает куда-то на очень и очень далекий план.

Математика обладает чудесной особенностью, выделяющей ее из других наук: если в ней потянуть за какое-то звено, то можно вытянуть всю цепь ее фактов, причем как такие ее части, которые предшествуют выбранному звену, так и такие, которые за ним следуют. Происходит это потому, что математика развивается по своим внутренним законам, и именно эти законы с железной необходимостью заставляют нас говорить «Б» всякий раз, когда сказано «А». Роль одного из звеньев в развитии математики сыграли и великие задачи. Взяв это звено, можно усмотреть генетическую связь между ним и очень многими областями как старой, так и новой математики.

Мы оставили Анаксагора у грубо отесанного куска мрамора за толстыми тюремными решетками глубоко задумавшимся над задачей о квадратуре круга. По общему мнению, из трех перечисленных задач эта задача — одна из наиболее древних. Какие соображения могли привести к ее возникновению? Уверенно ответить на этот вопрос мы не можем. Можно высказать лишь несколько более или менее правдоподобных догадок.

Прежде всего, задача представляется совершенно естественной с точки зрения самой элементарной логики математического мышления. В самом деле, с одной стороны, имели круг как первую фигуру, с которой приходится сталкиваться, когда получаешь в руки циркуль. С другой стороны, есть еще одна совершенно естественная фигура — квадрат. Каждая из этих фигур имеет вполне определенную площадь. Но тогда ни одного математика не надо, очевидно, убеждать в том, что между двумя такими фигурами с одинаковыми площадями можно совершенно естественно протянуть мостик — преобразовать одну из них в другую. Поскольку же преобразовывать можно было только циркулем и линейкой, то естественно возникла задача о том, чтобы с помощью циркуля и линейки построить сторону квадрата, площадь которого равна площади данного круга. Но это и есть задача о квадратуре круга.

А могло быть и иначе — к мысли о квадратуре круга могли прийти не непосредственно, а через ряд промежуточных звеньев. Так, например, издавна было известно утверждение, которое историческая традиция связывает с именем Пифагора — сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату его гипотенузы. Эта истина задолго до Пифагора была известна вавилонянам, которые использовали ее в своих практических расчетах.

Легко понять, что теорема Пифагора справедлива не только для квадратов, построенных на катетах и гипотенузе, но для любых подобных фигур, построенных на этих отрезках. В самом деле, если a, b, c — соответственно длины катетов и гипотенузы, а A, B, C — площади построенных на них подобных фигур, то, как известно,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \lambda.$$

(Через λ мы обозначили величину общего отношения). Отсюда

$$A + B = \lambda (a^2 + b^2) = \lambda c^2 = C,$$

что и доказывает утверждение.

В частности, сумма площадей двух полукругов, построенных на катетах, равна площади полукруга, построенного на гипотенузе (катеты и гипотенуза являются диаметрами соответствующих полукругов). Но в таком случае, как видно из рис. 1, сумма площадей двух заштрихованных серпиков равна площади заштрихованного

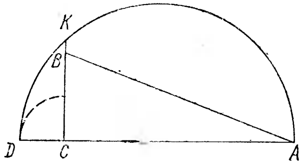


Рис. 1

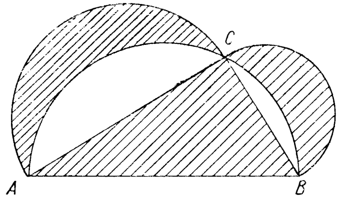


Рис. 2

прямоугольного треугольника. Рис. 1, на котором изображены полукруги, построенные на катетах и гипотенузе, выполняется с помощью циркуля и линейки. Каждый из серпиков представляет собой фигуру, известную в математике под именем луночки Гиппократа. Название связано с именем древнегреческого математика Гиппократа Хиосского, жившего в V ст. до н. э. и, в частности, занимавшегося отыскиванием площадей таких луночек.

Таким образом, с помощью циркуля и линейки фигуру, составленную из двух луночек Гиппократа, можно превратить в равновеликий им прямоугольный треугольник, который затем легко может быть преобразован, также с помощью циркуля и линейки, в равновеликий ему квадрат. Операция нахождения стороны квадрата, площадь которого равна площади прямоугольного треугольника, представлена на рис. 2. На нем изображен треугольник ABC с катетами $BC = a$, $AC = b$. Строим отрезок $AD = b + \frac{a}{2}$ и на нем как на диаметре — полуокружность. Пусть последняя пересекает катет BC или его продолжение в точке K. Тогда CK — сторона искомого квадрата, поскольку

$$CK^2 = AC \cdot CD = b \cdot \frac{a}{2}.$$

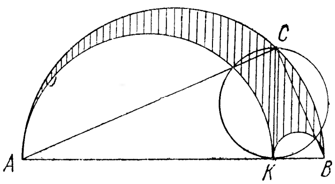


Рис. 3

Обратимся теперь к рис. 3, на котором изображены прямоугольный треугольник ABC, его высота CK, проекции AK и KB катетов на гипотенузу. На этих проекциях и на гипотенузе построены полуокружности. Заштрихованная фигура, образованная такими полуокружностями, напоминает древнегреческий сапожный нож арбелон, поэтому и задача об отыскании площади такой фигуры получила название задачи об арбелоне. Обратим внимание на то, что арбелон образован дугами трех окружностей, следовательно, в известном смысле может быть рассматриваем как некоторая обобщенная луночка Гиппократа. Рис. 3 также может быть выполнен с помощью циркуля и линейки. На этом рисунке представлен также и круг с диаметром CK. Пусть k — площадь такого круга, a — площадь арбелона. Легко усмотреть справедливость следующих равенств:

$$k=\pi\left(\frac{CK}{2}\right)^2,$$

$$a=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AK+KB}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AK}{2}\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{KB}{2}\right)^2=\pi\frac{AK\cdot KB}{4}.$$

Но

$$CK^2=AK\cdot KB,$$

следовательно,

$$a=k.$$

Таким образом, с помощью циркуля и линейки некоторые обобщенные луночки Гиппократа (арбелон) можно превратить в равновеликий им круг.

Отсюда совершенно естественно могла возникнуть мысль о том, а нельзя ли через посредничество каких-то луночек Гиппократа превратить круг в равновеликий ему квадрат. Так или не так происходило дело в действительности, мы сказать не можем, но нельзя отрицать того, что с точки зрения логики математических ассоциаций вероятность подобной последовательности рассуждений достаточно велика.

Почему возникла задача о делении угла на три равные части? Вероятно, потому, что на такое число частей приходилось делить произвольный прямолинейный отрезок. Это деление выполняется достаточно просто, как просто выполняется деление не только на три, но и на произвольное число частей. Снова математические ассоциации естественным путем приводят к мысли о возможности перенесения операции деления с отрезка прямой на иные геометрические образы. В данном случае, рассматривая угол как центральный, мы можем представить задачу о делении угла на три равные части как задачу о делении на такие части дуги окружности, на которую угол опирается (рис. 4).

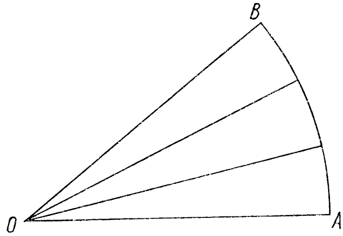


Рис. 4

Итак, можно или нельзя с помощью циркуля и линейки разделить на три равные части дугу окружности?

Задача об удвоении куба носит еще название делосской или делийской задачи. С ее возникновением связывают обычно легенду о разразившейся на острове Делосе чуме и об условии, которое поставил оракул в храме Аполлона перед делосцами, молившими божество об избавлении от лихой беды. Вероятно, было это так.

Геометрия и Аполлон

...Боги бывают милостивыми, но чаще всего они злы. Злость их не имеет границ. За вину одного расплачиваются многие. А часто и вины никакой нет. Вины нет, а наказание есть...

День за днем гибли и гибли люди на острове Делосе. Чума, как незваная гостья, нагло заходила в каждый дом и пятнала своей костлявой рукой каждую семью.

Все дни неумолчно ревет море. Попрятались птицы, укрылись в горах звери. Гигантские волны, обрушиваясь на прибрежные скалы, приносили с собой запах тлена, запах смерти...

Горе, страшное горе нависло над Делосом. За что прогневались боги? Какую жертву требуют они?

Почему молчит оракул? Почему спит Пифия? День сменяется ночью, ночь — еще более тягостным днем, а спасенья все нет и нет.

Наконец, после долгих дней непрерывного сна, прорицательница пробудилась. Она сидела у входа в пещеру, из глубины которой неслись густые, тлетворные миазмы. Ее длинные, всклокоченные, нечесаные волосы развевались на ветру, как бесчисленные змеи на голове Медузы Горгоны. Под действием вредоносных испарений Пифия впала в состояние транса и начала выкрикивать слова, смысл которых не был понятен непосвященным. Этот смысл могли разгадать только жрецы, да и то лишь после того, как сверялись со старыми книгами.

На этот раз смысл бессвязного бормотания Пифии был таков: Аполлон, божественный покровитель острова, требовал удвоить алтарь в его храме. На этом алтаре по особо торжественным праздникам верховный жрец храма приносил кровавые жертвы.

Требование поначалу показалось очень простым. Измученные изнурительным бедствием делосцы бросились в каменоломню и после нескольких дней лихорадочного труда выточили из громадного куска гранита куб, в точности равный храмовому алтарю.

Обвязав камень веревками, обессиленные люди впряглись в лямки и поволокли его к храму. С неимоверными усилиями подняли его на старый жертвенник и укрепили. Желание бога было выполнено — объем нового жертвенника был точно вдвое больше объема старого. Жители ликовали...

Радость оказалась преждевременной. Неумолимая, незваная гостья по-прежнему ходила из дома в дом, и по-прежнему воздух оглашался воплями и стенаниями. Что же бог? Чего же он хочет еще? Разве они не сделали того, что он просил?

Вновь поднялась на высохших ногах старая прорицательница и вновь уселась у входа в священную пещеру. И опять, как прежде, извивались на ветру ее нечесаные волосы, похожие на бесчисленных змей Горгоны, и опять тяжелые испарения окутали ее и помутили рассудок. Снова полились бессвязные выкрики и бормотания. Жрецы открыли свои божественные книги и стали искать смысл того, что им передала Пифия в своем горячечном бреду. На этот раз смысл прорицания был таков: удвоить жертвенник, не меняя его формы.

Не раздумывая, как и в первый раз, бросились воспрявшие духом делосцы в каменоломню.

Однако на этот раз дело оказалось намного труднее, чем прежде. Кто-то предложил выточить куб, ребро которого точно в два раза больше ребра храмового алтаря. Однако тут же это предложение было высмеяно — объем такого куба будет не в два, а в восемь раз больше объема куба, стоящего в храме. Несколько каменщиков взялись выточить куб с объемом, лишь приблизительно вдвое превосходящим объем куба, выточенного ими же несколько дней назад. И это было отвергнуто — богу надо было дать точное решение.

После целого ряда бесплодных попыток решить задачу несколько человек вызвались съездить в Афины, чтобы посоветоваться с тамошними математиками.

Посланные возвратились через несколько дней. Некто Гиппократ с острова Хиоса, находившийся в то время в Афинах, предложил найти ребро искомого куба как первое из двух средних пропорциональных между двумя величинами, из которых одна — ребро куба, стоящего в храме Аполлона, вторая — вдвое больше ее.

И вновь застучали молотки. Через несколько дней новый жертвенник был готов. Тащить его в храм пришлось значительно большему числу людей, чем в первый раз. Убрали два старых куба и на их место водрузили новый.

...И на этот раз жестокий бог обманул надежды несчастных делосцев. Смерть беспощадной рукой продолжала косить ни в чем не повинных людей. Чего же еще надо жестокосердному Аполлону? Разве мало ему тех жертв, что уже принесены? Разве они не старались во всем следовать его велениям?

В третий раз поднялась высохшая, как безжизненная олива, Пифия и заняла свое место у пещеры. В третий раз измученные жители острова с болью и надеждой прислушивались к каждому ее вздоху.

Веление, которое в этот раз передал Аполлон, было таково: куб был построен с использованием недопустимых инструментов. Надо было это сделать, не прибегая ни к какой иной помощи, кроме циркуля и линейки. Только эти инструменты божественны. Все остальные не достойны того, чтобы с их помощью исполнять волю богов.

Черный мрак вновь опустился над Делосом...

Несмотря на все усилия, которые предпринимались, все три задачи решению не поддавались. В чем дело? В том ли, что за них брались люди бездарные? Нет, решить их пытались и многие выдающиеся математики. Тогда, может быть, задачи просто не имеют решения?

Мы увидим позднее, что это было действительно так. Однако в античные времена об этом можно было только догадываться, дать же ответ на вопрос, так это или не так, не умели — математика все еще оставалась не настолько развитой наукой для того, чтобы отвечать на подобные вопросы.

Циркулем и линейкой задачи решены не были. Однако, если не ограничиваться указанными инструментами, то их можно было решить, т. е. построить сторону квадрата, равновеликого кругу, разделить на три равные части произвольный угол, построить ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного куба. Это не будут, конечно, решения, соответствующие тем требованиям, которые были поставлены, но это будет, очевидно, определенным приобретением в математике. В частности, в процессе отыскания таких решений был открыт целый ряд в высшей степени важных и интересных кривых. Эти кривые надо было присоединить к прямой линии и окружности, чтобы в их взаимном пересечении было найдено решение поставленных задач. Вот некоторые из таких кривых.

Кривые

Представим себе равномерно вращающийся патефонный диск, по радиусу которого равномерно ползет муха, причем движение свое она начинает с центра диска. Какую кривую будет описывать муха? Дадим название для такой кривой — *спираль Архимеда.* Для того, кто знаком с методом координат, не составит труда написать уравнение спирали. С этой целью воспользуемся полярной системой координат, которая строится так. На плоскости берется произвольная направленная полупрямая p (полярная ось). Тогда, если M — произвольная точка плоскости, то сопоставим с нею два числа — отрезок $OM = \rho \geqslant 0$, называемый полярным радиусом-вектором, и угол θ, называемый полярным углом и отсчитываемый против движения часовой стрелки от полярной оси до полярного радиуса-вектора. Числа ρ, θ называются полярными координатами точки M, а соответствие между точками плоскости и их полярными координатами — полярной системой координат (рис. 5). Точка O называется полюсом системы.

Примем то положение вращающегося радиуса, которое соответствует пребыванию мухи в центре диска, за полярную ось, тогда центр диска совпадает с полюсом, а расстояние, которое муха проползет по радиусу (полярный

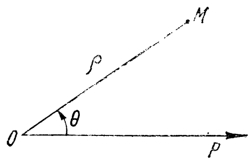


Рис. 5

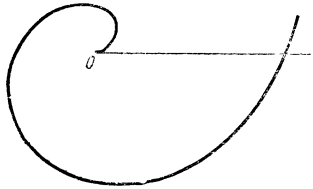


Рис. 6

радиус-вектор ρ), будет пропорционально углу, на который повернется этот радиус (полярный угол θ). Следовательно,

$$\rho = a\theta, \tag{1}$$

где a — множитель пропорциональности. Спираль имеет вид, представленный на рис. 6.

Можно было бы указать множество инструментов, вычерчивающих спираль. Пусть читатель попробует изготовить какой-нибудь из них.

С помощью спирали Архимеда может быть легко решена задача о трисекции угла. В самом деле, как показывает уравнение (1), разделить на три равные части угол — это значит разделить на столько же частей соответствующий этому углу полярный радиус-вектор. Решение представлено на рис. 7. На нем изображен подлежащий делению на равные части угол AOB. Примем вершину угла O за полюс, сторону OA — за полярную ось полярной системы координат. Построим спираль Архимеда, имеющую уравнение (1), при каком-угодно множителе пропорциональности a. Пусть она пересечет сторону OB угла в точке K. С помощью циркуля и линейки делим отрезок OK на три равные части (читатель должен знать, как это делается). Третьей частью указанного отрезка проводим дугу окружности с центром O и делаем засечку на спирали (точка M). Проводим прямую OM. Угол AOM — третья часть угла AOB.

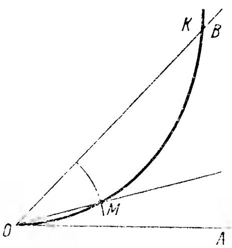


Рис. 7

Очевидно, спираль Архимеда позволяет разделить произвольный угол не только на три, но и на произвольное число равных частей. При этом, разумеется, к инструменту, вы-

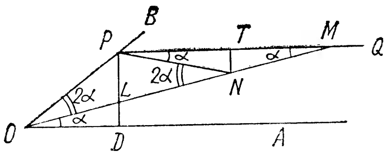


Рис. 8

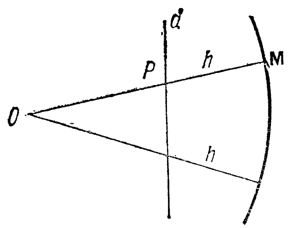


Рис. 9

черчивающему спираль, должны быть присоединены циркуль и линейка.

Была ли спираль Архимеда открыта именно при решении задачи о трисекции угла, не известно. Но, учитывая ее связь с задачей, связь, которая основывается на прямой пропорциональной зависимости между линейными и угловыми величинами, можно говорить почти с полной уверенностью о том, что мысль о спирали возникла именно в связи с задачей о трисекции.

Задача о трисекции угла может быть решена еще и так. Пусть AOB — произвольный угол. На его стороне OB возьмем произвольную точку P, через которую проведем прямую PQ, параллельную второй стороне угла OA, и прямую PD, перпендикулярную к этой стороне. Через вершину O проведем прямую так, чтобы отрезок LM (L — точка пересечения этой прямой с PD, M — точка ее пересечения с PQ) был равен $2OP$. Угол AOM есть третья часть угла AOB (рис. 8). В самом деле, пусть N — середина отрезка LM, NT — перпендикуляр к PQ. Тогда, как легко понять из рис. 8, $OP=PN=NM$. Если обозначить угол AOM через α, то и $\angle PMO = \angle MPN=\alpha$. Угол ONP равнобедренного треугольника OPN является внешним углом треугольника PNM, следовательно, равен 2α. Утверждение доказано.

Провести с помощью циркуля и линейки через точку O прямую так, чтобы отрезок LM оказался равным удвоенному отрезку OP, невозможно. Это можно сделать с помощью вставки, предложенной Архимедом. Именно на полоске бумаги (во времена Архимеда это могла быть полоска пергамента) наносятся точки L, M так, чтобы отрезок LM равнялся удвоенному отрезку OP. После этого полоска передвигается так, чтобы она все время проходила через точку O (вершину угла), а точка L перемещалась по прямой DP. Тогда в тот момент, когда точка M окажется на прямой PQ, полоска отделит от данного угла его третью часть.

Вместо полоски с двумя нанесенными на ней точками можно воспользоваться кривой, которая названа именем Никомеда, греческого математика, жившего во II ст. до н. э. Это — *конхоида Никомеда.* Строится она так. Берется произвольная точка O — полюс конхоиды, прямая d, не проходящая через полюс — база конхоиды, и отрезок длины h — интервал конхоиды. Через полюс O проводятся всевозможные прямые и от точек их пересечения с базой откладывается отрезок PM, равный интервалу. Множество точек M и есть конхоида (рис. 9).

Вернемся снова к рис. 8. Если взять конхоиду с полюсом O, базой PD и интервалом, равным удвоенному отрезку OP, то она пересечет прямую PQ в точке M. Прямая OM отсекает от угла AOB третью часть.

Последние мгновения ...Чертежи, чертежи, чертежи. Они повсюду: на пыльном мраморном столе, нацарапанные острым стилем, на стенах, выполненные куском угля, на полу, начерченные мелом. Одетый в потертый белый хитон, Архимед присел к столу и задумался. Пальцы рук мелко дрожали, как в лихорадке. Крупный пот, смешанный с пылью, падал со смертельно усталого лица на руки, на одежду, на листы пергамента, разбросанные на столе.

Нет, он не бежал, как последний трус, с поля боя. Все, что было в его силах, весь свой ум, все свое умение он отдал городу. В долгие бессонные ночи, в дни, напоенные изнурительной жарой, он один был мозгом и сердцем всей обороны Сиракуз. При одном упоминании его имени римляне в страхе отбегали от городских стен, опасаясь сокрушительного камнепада, низвергающегося потока просмоленной пакли, града дротиков и длинных копий. Не он ли, не сходя с места, сжег римский флот, приблизившийся к морским оборонительным укреплениям города? Не он ли один изобретенной им системой полиспастов вздергивал в воздух римские галеры и с высоты кидал их в морскую пучину? Но есть предел и человеческому гению, и человеческим силам. Он уже дряхлый старик, ему не удержать в руке боевого меча. Он держался, держался до тех пор, пока враг находился за стенами города. Но вот уже легионеры с крылатыми

шлемами замелькали на источенных временем камнях мостовой. Греки сопротивляются из последних сил. В рукопашном бою для Архимеда нет места...

Мягкая прохлада ласково обволакивала разгоряченное полуденным зноем тело. Шум битвы глухо доносился сквозь плотную портьеру, закрывавшую вход. Соломенные шторы, висевшие на обоих окнах, создавали полумрак, нисколько не мешавший видеть предметы привыкшим к нему глазам.

Жизнь подходила к концу, жизнь долгая, жизнь тяжелая. За семьдесят пять лет, отпущенных ему роком, он в вечных поисках, в постоянном напряжении, в разъездах, в непрекращающихся спорах в мастерской, на верфях, в каменоломнях ни разу не имел возможности оглянуться на нее, подумать, правильно ли жил, получил ли от нее хоть часть тех наслаждений, о которых так самозабвенно говорил этот вдохновенный старец Эпикур. Семнадцатилетним юношей стоял он над гробом великого мыслителя, думая собственной жизнью воплотить его жизнерадостную философию. Воплотил ли?

Еще в юные годы вступил он на эту тернистую, извилистую, полную бесчисленных подъемов и бесчисленных спусков стезю ученого. Жизнь ученого — не искрящийся янтарным блеском и пенящийся переполняющим его вином хрустальный бокал, не веселые каждодневные загородные прогулки. На себе самом он испытал, что эта жизнь — вечное, ни на день, ни на час не прекращающеся служение единому богу, единому кумиру, единому властителю всех помыслов и всех желаний. Наука — это гипнотизер, стоит лишь раз подпасть под волшебное очарование ее истин, как все оказывается забытым ради нее одной, до последнего вздоха, до могильного склепа.

Такой была его собственная жизнь, такой была и жизнь его отца. Отца звали Фидием. Услужливая память нарисовала картину бесконечно далекого детства, когда юному Архимеду приходилось чуть ли не каждого нового знакомого убеждать в том, что его отец лишь однофамилец знаменитого создателя Зевса Олимпийского и девы Афины, что скульптор Фидий жил за сто с лишним лет до Фидия — его отца, астронома. Удивлялись тому, что Фидии — и вдруг не родственники, и что, наоборот, Архимед совершенно неожиданно оказывается родственником царя Гиерона, а следовательно, и его сына Гелона...

А вот пышная Александрия. Архимед часами ходил по каменным плитам ее улиц, взбирался на Форосский маяк, смотрел оттуда на гавань, сплошь запруженную греческими, римскими, финикийскими, персидскими и другими кораблями, приплывшими сюда, казалось, со всей Ойкумены. Но гораздо больше времени проводил он в библиотеке, той знаменитой александрийской библиотеке, собранию рукописей которой могло бы позавидовать любое книгохранилище мира. В библиотеке собиралась вся «золотая» молодежь города великого Александра. В страстных спорах с молодыми людьми, почти все из которых были почитателями своего знаменитого согражданина Евклида, постепенно вызревало понимание Архимедом своего места в науке, того, что сближало его с александрийцами, и того, что отличало его от них. Но, несмотря на несходство во взглядах, благоговейное уважение к памяти великого Евклида безраздельно овладело и самим Архимедом, как только он познакомился с творениями ученого. «Начала» Евклида стали тогда настольной книгой на всю его долгую жизнь...

Шум битвы все нарастал. Плотная штора уже не могла заглушить ликующих возгласов победоносных латинян, звенящих ударов мечей по щитам последних защитников Сиракуз и глухих — по их измученным и истерзанным долгой обороной телам. Торжествующий враг уже овладел городом-страдальцем и предался гнусному, омерзительному грабежу, не щадя ни детей, ни женщин, ни стариков.

Как странно, что все это — и удары мечей, и стоны умирающих, и победные крики римлян,— кажется таким далеким по сравнению с тем, что было так давно — более полувека назад. Архимед вдруг с жуткой отчетливостью вспомнил свой долгий и очень опасный переезд на небольшой галере из Александрии в Сиракузы. Неспокойное море с глухой угрозой бросало и бросало на беззащитное, утлое суденышко зеленые валы, увенчанные гривой кипящей беломраморной пены, и несчастным аргонавтам казалось, что вырвать их из смертельных объятий Посейдона уже не может ни человеческая, ни сверхчеловеческая сила. Но вот кормчий вновь всей тяжестью своего тела наваливался на тяжелое рулевое весло, высоко поднимал его конец вверх и с силой обрушивал на рокочущую зыбкую громаду. Содрогнувшись, как взнузданный конь, галера на миг застывала на гребне высокой волны и затем плавно скатывалась в очередную бездонную пропасть...

Выйдя из Александрии нарядной, украшенной разноцветными парусами красавицей, галера прибыла в Сиракузы разбитой, дырявой, лишенной мачт и ветрил оборванной нищенкой...

Свирепое лицо римского легионера вдруг явилось на фоне пестрой толпы сиракузян, вышедших встречать несчастный корабль с полумертвыми мореплавателями. Откуда и как он возник, этот незваный чужестранец? Бред ли он больного воображения или кошмар, явившийся во плоти? Он оскаливает свой рот, на шее у него вздуваются вены, он что-то кричит, но Архимед не слышит его слов. Прошлое все еще властно держит его в своих руках, колдовские чары забвения все еще не развеяны...

Призрак не исчезал. Он все увеличивался и увеличивался в помутненных глазах математика, пока, наконец, не заполнил собой всей комнаты, вытеснив из нее всю без остатка солнечную гавань старых Сиракуз. Ах, вот это, оказывается, кто. Грабитель и убийца добрался и до его жилища. Свирепый латинянин — в таком виде явилась к нему смерть, о которой он почти не думал прежде.

— Не трогай моих чертежей! — тихо, но твердо и повелительно произнес старик. Это были его последние слова. Широкий обоюдоострый меч с силой обрушился на седую и изможденную, но гордую и вдохновенную голову великого гражданина Вселенной...

Говорят, что так погиб Архимед в своем доме на одной из улиц взятых с бою и разграбленных римлянами Сиракуз. Римский полководец Марцелл, долго и безуспешно пытавшийся овладеть городом, был сильно опечален, узнав о смерти одного из величайших ученых и одного из самых горячих и неустрашимых патриотов.

Триады Гиппократ Хиосский, с которым мы познакомились на предыдущих страницах, занимался не только луночками, образованными дугами окружностей, с его именем связана также одна из попыток решения задачи об удвоении куба. Как известно, эта задача состоит в требовании построить с помощью циркуля и линейки ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного куба. Если a — ребро данного куба, x — ребро искомого, то, в соответствии с задачей, мы должны иметь

$$x^3 = 2a^3. \qquad (2)$$

Гиппократ задачи не решил. Ни с помощью циркуля и линейки, ни с помощью иных инструментов. Но он показал, что эта задача может быть сведена к задаче о нахождении двух средних пропорциональных между двумя заданными величинами, из которых первая равна ребру данного куба, другая — вдвое больше ее. Тогда ребро искомого куба будет первой средней пропорциональной. Действительно, если воспользоваться современными обозначениями, то мы будем иметь:

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Из этих двух пропорций получаем:

$$x^2 = ay, \quad y^2 = 2ax. \qquad (3)$$

Исключив из последних равенств y, после сокращения получающегося при этом соотношения на x, придем к равенству (2).

Впереди у нас будет большой разговор о творце аналитической геометрии Рене Декарте. Мы будем говорить о методе координат и об уравнениях кривых в той или иной системе координат, как мы уже говорили об уравнении спирали Архимеда в полярной системе. Сейчас же лишь скажем, что каждое из уравнений (3) представляет собой в прямоугольной декартовой системе уравнение параболы, одной — с осью, совпадающей с осью ор-

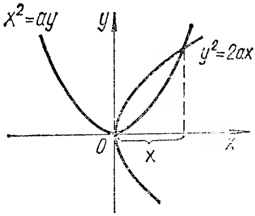


Рис. 10

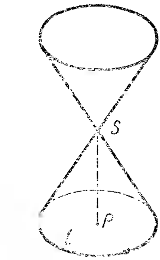


Рис. 11

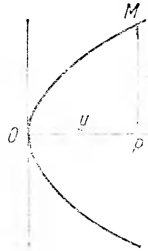


Рис. 12

динат, другой — с осью, совпадающей с осью абсцисс (рис. 10). Ребро искомого куба представляет собой абсциссу точки пересечения этих двух парабол. Таким образом, задача об удвоении куба может быть решена с помощью циркуля, линейки и прибора, вычерчивающего параболы.

Сам Гиппократ, вероятно, представления о параболе не имел. Не имел он, разумеется, никакого представления и об уравнении кривой, поскольку метод координат грекам известен не был. На геометрические свойства кривых, описываемых уравнениями (3), впервые обратил внимание греческий математик Менехм, который жил в IV ст. до н. э. Был он учеником одного из самых выдающихся ученых этого времени Евдокса Книдского. Последнего иначе не называли, как богоравным. Не называли иначе и Менехма — он был учеником богоравного Евдокса.

Менехм открыл не только параболы, т. е. кривые, которые мы сейчас задаем с помощью уравнений (3). Им были открыты одновременно эллипсы и гиперболы. Эти кривые — эллипс, гипербола, парабола — с того времени всегда выступают вместе и за ними твердо укрепилось название *триад Менехма.*

Полагают, что Менехм открыл триады, рассматривая сечения прямого кругового конуса плоскостями. При этом конус следует рассматривать состоящим из двух полостей (рис. 11). Такой конус получается так. Пусть l — окружность с центром P, лежащая в некоторой плоскости π. Проведем через P прямую, перпендикулярную к плоскости π, и на ней выберем некоторую точку S. Проведем через S всевозможные прямые, пересекающие окружность l. Поверхность, ими образованная, и есть прямой круговой конус. Части его, расположенные по разные стороны от точки S (вершины конуса), вернее, по разные стороны от любой плоскости, проходящей через вершину и не содержащей образующих конус прямых, являются его полостями.

Не исключено, это представляется даже в высшей степени вероятным, что Менехм пришел к коническим сечениям как раз через задачу об удвоении куба. Великими задачами занимались в древности многие. Эти задачи часто сводились к другим, решение которых надеялись получить проще. Так это было и с рассматриваемой сейчас задачей об удвоении куба и двумя средними пропорциональными Гиппократа.

Разумеется, представления об уравнениях кривых греки не имели. Однако те свойства кривых, которые мы записываем с помощью уравнений, греки выражать умели. Делалось это с помощью так называемой риторической алгебры. Так, кривая, которую мы задали с помощью первого уравнения (3), характеризуется свойством, которое греками формулировалось бы так: если из любой точки кривой опустить перпендикуляр на ее ось, то площадь квадрата, построенного на этом перпендикуляре, равна площади прямоугольника, одна сторона которого имеет постоянную длину a, а другая есть отрезок от вершины кривой до основания указанного перпендикуляра (рис. 12). Такое именно свойство мог обнаружить Менехм у одной из трех открытых им кривых.

Произведения Менехма до нас не дошли. То, что нам известно о его открытии, мы находим, со ссылкой на него, в трудах более поздних математиков. Но эти ссылки разноречивы. Некоторые авторы полагают, что греческий математик, открывший конические сечения, рассматривал лишь плоскости, ортогональные к одной из образующих конуса. Тогда при осевом угле конуса, меньшем прямого, в сечении получается эллипс (рис. 13, *а*), при угле, равном прямому,— парабола (рис. 13, *б*), при тупом угле — гипербола (рис. 13, *в*). Другие считают, что Менехму уже было известно то, что все три кривые получаются при пересечении плоскостями одного и того же конуса. Тогда, если секущая плоскость не параллельна ни одной из образующих конуса, в сечении получается эллипс. Если она параллельна одной образующей, то сечение — парабола, наконец, если она параллельна

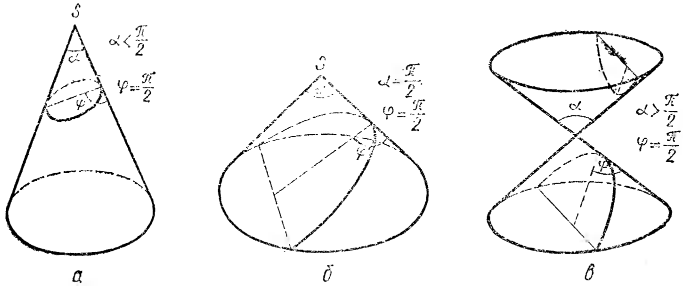


Рис. 13

двум образующим, кривая есть гипербола (рис. 14). Некоторые авторы полагают, что одновременное рассмотрение всех трех кривых на одном и том же конусе есть дело более позднего времени и связывается с именем выдающегося греческого математика Аполлония Пергского (II ст. до н. э.).

Конические сечения вокруг нас

Конические сечения были открыты. Это было поистине великое открытие. Уравнения этих кривых в прямоугольной декартовой системе координат есть уравнения второй степени, поэтому конические сечения называют еще кривыми второго порядка. Значения кривых второго порядка, вероятно, еще никто не сумел переоценить. Они — на каждом шагу нашей жизни. Примеры? Вот они. Наша Земля, например, в своем движении вокруг Солнца описывает эллипс. То же самое происходит и со всякой другой планетой Солнечной системы. Этот факт фиксируется первым законом Кеплера. (Разумеется, движение планет происходит по более сложным кривым, так как, кроме вращения вокруг Солнца, все планеты принимают еще участие в поступательном движении всей Солнечной системы. Однако, отвлекаясь от последнего движения, можно говорить о движении планет по эллипсам).

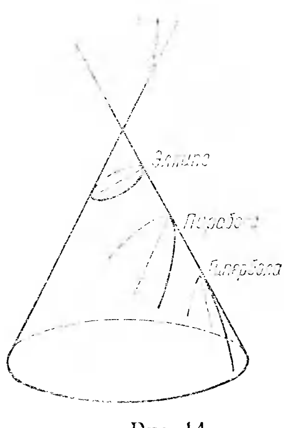


Рис. 14

Движение по эллипсам происходит потому, что каждая планета в каждый момент имеет скорость, не превосходящую некоторой величины. Оказывается, что если бы эта скорость была большей, то движение происходило бы или по параболе, или по гиперболе. Никаких иных траекторий тела́, движущиеся относительно неподвижного тела и притягивающиеся к нему по закону всемирного тяготения, иметь не могут.

Итак, кривые второго порядка лежат, по сути, в основе нашего мироздания. А это не так уж мало.

Далее, если, например, повернуть параболу вокруг ее оси, то получается поверхность, называемая параболоидом вращения. На оси такого параболоида есть точка — фокус, обладающая замечательным свойством: всякая проходящая через нее прямая, отразившись от внутренней поверхности параболоида, пойдет в направлении, параллельном его оси. Но это означает, что если изготовить прожектор в форме параболоида вращения и поместить в фокусе электрическую лампочку, то все лучи после отражения от параболоида образуют параллельный пучок. Это представляет, очевидно, большое преимущество, так как именно такой пучок лучей мало рассеивается в пространстве даже на достаточно больших расстояниях от источника света. Фактически, конечно, идеального пучка параллельных лучей мы не получаем, так как лампочка — не точка, но и приближения к такому пучку, которого мы достигаем, достаточно для практических целей.

В форме параболических зеркал изготовляются и рефлекторы телескопов. Назначение этих рефлекторов в известном смысле противоположно назначению рефлекторов в прожекторе: в то время, как в прожекторе рефлектор отбрасывает в пространство световые лучи, в телескопе он собирает лучи, идущие из космоса, в своем фокусе.

Достаточно теперь направить на этот фокус систему увеличительных стекол, и мы получим о светиле, лучи от которого собрали, гораздо большую информацию, чем ее может дать невооруженный глаз.

Мнимой осью гиперболы называется та ее ось симметрии, которую гипербола не пересекает. Если повернуть гиперболу вокруг такой оси, то поверхность, которая при этом образуется (она называется однополостным гиперболоидом вращения), тоже имеет множество практических применений. Гиперболоид представляет собой линейчатую поверхность. На нем располагаются два семейства прямолинейных образующих. Образующие одного семейства (как того, так и другого) друг друга не пересекают, образующие разных семейств пересекаются всегда. Именно это свойство и находит себе применение в технике. Если, например, изготовить башню из прямолинейных стержней, поставив их вертикально, то получится очень непрочное сооружение — оно погнется от сравнительно небольшой нагрузки. Если же стержни расположить так, чтобы они образовали однополостный гиперболоид (причем именно два его семейства) и связать в точках их пересечения, то получится очень легкая и очень прочная конструкция. В форме таких поставленных друг на друга гиперболоидов изготовляются башни, получившие название башен системы инженера Шухова (по имени выдающегося русского инженера академика В. Г. Шухова).

Спиралями, конхоидами и коническими сечениями далеко не исчерпываются все те замечательные кривые, которые были открыты в попытках решения знаменитых задач древности. Однако, сколько бы ни было найдено замечательных кривых, великих задач древности они не решают. Ведь, как мы помним, надо было не просто их решить, а решить, не прибегая ни к каким иным линиям, кроме прямой и окружности. А как ответить на вопрос, можно или нельзя ту или иную задачу решить с помощью проведения только этих линий?

Дать положительный ответ на этот вопрос, если он существует, в принципе оказывается проще, чем дать отрицательный — надо просто попытаться его найти, после более или менее продолжительных поисков такое решение будет найдено.

Гораздо хуже обстоит дело в том случае, когда решения не существует. Здесь, оставаясь один на один с обычной геометрической интуицией, едва ли можно надеяться на получение требуемого ответа. В этом случае задачу нужно подвергнуть скрупулезному алгебраическому анализу, чтобы невозможность ее решения оказалась сведенной к невозможности выполнения тех или иных алгебраических равенств.

Итак, за помощью к алгебре!

Алгебра приходит на помощь к геометрии

Мысль о том, чтобы заставить алгебру работать на геометрию, подготавливалась столетиями. Сначала эта мысль робко реализовала себя у греков в виде так называемой риторической алгебры. Алгебраических символов, кроме самых простейших, не было, а потому то, что мы нашли бы совершенно просто, подвергая уравнения геометрических образов хорошо известным алгебраическим операциям, древние математики вынуждены были находить с помощью чрезвычайно неудобных, громоздких, лишенных всякой наглядности словесных выражений. Далеко с такой алгеброй уйти было нельзя.

Символику ввел выдающийся французский математик Франсуа Виет лишь в XVI ст. Однако по нашим нынешним нормам она была в значительной степени аляповатой и несуразной. Пользы такая символика принесла мало. Но и с ее помощью соотечественник Виета Пьер Ферма сделал попытку соединить алгебру с геометрией в то единое целое, что мы называем сейчас аналитической геометрией. Ферма считается одним из творцов этой науки. Однако неизящная, неудобная, плохо приспособленная к нуждам как алгебры, так и геометрии виетовская символика отпугнула математиков и от аналитической геометрии Ферма. Ферма — творец этой геометрии, но о нем вспоминают в этой связи лишь в историко-математических работах, истинным же ее творцом, остроумным, удачливым, все единодушно называют его современника и соотечественника Рене Декарта. Декарт переделал символику Виета. У Виета была тяжеловесная латынь, у Декарта — легкий разговорный французский язык. У Виета — ненужные усложнения и условия, Декарт же отбрасывает их, идя к цели прямо и просто.

Кто же он, этот человек, которому благодарные потомки отвели в Пантеоне одно из самых почетных мест?

Счастливая судьба солдата

...1918 год. Холодный ноябрьский ветер метет вылизанные до блеска улицы маленького голландского городка Бреда. Прохожих совсем немного. Молодой солдат в форме армии штатгальтера Морица Оранского со скучающим видом фланирует по плитам мостовой. Опытному глазу сразу видно, что единственная цель солдата — найти какое-нибудь развлечение.

Но вот он замечает, что около одной из деревянных тумб с наклеенными на ней объявлениями толпится группа оживленно жестикулирующих людей. Солдат прислушивается к разговорам, на лице его изображается досада — говорят на голландском языке, которого он, очевидно, не понимает. Ему, однако, ясно, что предмет разговора — большой лист бумаги, неплотно приклеенный к тумбе и колышащийся под порывами осеннего ветра.

«Что написано на этом плакате?» — обращается он к присутствующим по-французски.

Его не понимают. Однако нет. Один из тех, к кому обращен вопрос, смотрит на француза с интересом. Месье солдату надо перевести текст объявления? — обращается он к любопытствующему иностранцу. Он переведет, но при одном условии — солдат принесет ему решения всех тех задач, которые приведены на этом плакате.

Доброжелательный голландец представляется — преподаватель физики, медицины и математики Бекман, а на плакате, прикрепленном к тумбе, объявление о конкурсе на решение математических задач. Объявлена и награда, правда, больше символическая, чем реальная. Но гораздо большей наградой будет то, что решивший получит титул лучшего математика города.

На следующее утро молодой француз робко постучался в дверь квартиры Бекмана. Задачи были решены, все до одной. Удивлению профессора нет границ. Дверь гостеприимно распахивается, иностранец — желанный гость в доме. Сбегается вся семья взглянуть на это чудо.

Еще ни разу не случалось, чтобы кто-нибудь прежде вот так просто, в один присест решил задачи, над которыми месяцами ломали головы и общепризнанные авторитеты. И ведь подумать только — Бекман вначале принял его за этакого гуляку!

Через малое время узнают, что молодого француза зовут Декартом, что родом он из Турени, что воспитывался в иезуитской коллегии Ла Флеш, там же изучал и математику.

Унылое течение гарнизонной жизни было нарушено. Декарт стал частым гостем в квартире Бекмана. Долгие часы проходили в захватывающих беседах о математике, в решении модных в то время задач, в разговорах о сущности и назначении математики.

Еще в коллегии его, тогда совсем юного искателя истины, поразило крайнее несоответствие между прочностью фундамента, на котором покоилось здание математики, и хилостью самого здания. Должна же существовать какая-то более солидная конструкция, достойная подведенной под нее базы. Но как найти эту конструкцию?

«Я с детства,— писал Декарт впоследствии,— воспитывался для науки, и так как меня уверили, что она дает ясное и верное познание всего, чем жизнь красна, то я прилагал необыкновенную ревностность к ее изучению. Но когда я кончил весь курс, целью которого обыкновенно считают зачисление в ученые, мои взгляды совершенно изменились. Я очутился в такой сумятице сомнений и ошибок, что из моей жажды учения вынес только одну пользу — умение раскрывать все более и более глубину моего невежества, а между тем я был учеником знаменитейшей школы Европы и полагаю, что если есть на земле где-нибудь ученые люди, то именно там должны быть таковые.

Я выучился всему, чему учились другие, но, не удовлетворившись этим, я прочел все, какие только могли попасть мне в руки, книги о предметах, считавшихся самыми любопытными и научными».

Не удовлетворенный ни теологией, ни философией Декарт обращается к математике и с огорчением убеждается, что и на этой гранитной основе творчества не выстроено ничего более возвышенного, чем приложение математики к практической механике.

Однако настойчивые размышления приносят свои плоды, и вот, наконец, начинают вырисовываться контуры строения, еще далекого от ожидаемого совершенства, но более или менее соответствующего замыслам. По словам ученого, в следующем, после описанных выше событий, году, когда он находился в швабском городе Ульме, он пережил три необычайных сна, которые явили ему новую «удивительную» науку.

Можно усмотреть в этом признании какое-то преувеличение, но совершенно бесспорно, что период высочайшего творческого напряжения, период близкого к экстазу вдохновения—это именно такой период, когда стираются грани между мечтой и действительностью, когда жизнь становится мечтой и мечта — жизнью.

В чем же заключается открытие Декарта?

Великое творение Мы называем его аналитической геометрией. Как и все гениальное, оно гениально просто. Энгельс назвал открытие аналитической геометрии (декартовой переменной величины) поворотным пунктом в математике. Он писал, что благодаря этому открытию в математику вошли диалектика и движение, а это немедленно повлекло за собой и развитие бесконечно малых. Обычно творцами исчисления бесконечно малых (дифференциального и интегрального исчисления) считают великого английского ученого Ньютона и великого немецкого философа Лейбница. Энгельс же подчеркивал, что началом следует считать открытие Декарта, а Ньютон и Лейбниц лишь в целом завершили, но не открыли это исчисление.

Основная мысль Декарта, как мы уже говорили, заключалась в том, чтобы заставить алгебру «работать» на геометрию. Алгебра имеет дело с числами, уравнениями, геометрия — с точками, линиями, поверхностями. Связать одно с другим — это значит найти способ както сопоставить геометрическим образам образы алгебры и затем, выполняя над последними те или иные формальные, осуществляемые по определенным законам действия, результаты этих действий истолковать геометрически.

Было бы очень затруднительно рассказывать о существе аналитической геометрии в терминах, которые были приняты во времена Декарта. Столь же затруднительно пользоваться и математическими обозначениями XVII ст. Как мы уже говорили, сам Декарт в значительной мере усовершенствовал символику. Многое из того, чем мы пользуемся сейчас, существовало и во времена Декарта, но многое было отличным от нашего. Расскажем о сущности открытия Декарта современным языком.

Для того, кто знаком с методом координат, факты, которые мы сообщим, не будут новыми. Однако мы настоятельно рекомендуем ему прочитать об этом еще раз — для полноты картины это было бы крайне желательно. О некоторых из таких фактов, не входя в подробности, мы уже говорили выше — вспомним уравнения парабол в прямоугольной декартовой системе координат, уравнение спирали Архимеда в полярной системе.

Основными понятиями в математике являются понятия числа и фигуры. Каждую фигуру можно охарактеризовать определенными параметрами — длиной, площадью, объемом. Однако эти параметры не дают возможности отличать одну фигуру от другой, если их параметры одинаковы. Надо уметь с помощью чисел определять также и положение фигуры в пространстве. Это делается в методе координат (или в аналитической геометрии; для нас сейчас оба термина являются идентичными). Метод координат объединяет хорошо развитый формальный аппарат алгебры с геометрической интуицией. Овладеть методом координат — это значит слить в своем представлении в одно целое эти две вещи. Такое овладение достигается в результате длительных и строго целенаправленных упражнений.

Каждая геометрическая фигура представляет собой множество точек. Чтобы задать с помощью чисел положение фигуры в пространстве, следует уметь задавать с помощью чисел положение точки. В зависимости от того, где расположена точка — на линии, на поверхности или в трехмерном пространстве, следует взять и соответствующее количество чисел: одно — для точки на линии, два — для точки на поверхности, три — для точки в пространстве (более подробно об этом будет сказано несколько позднее). Тогда между точками, с одной стороны, и совокупностями чисел, с другой, установится некоторое взаимно однозначное соответствие. Это соответствие — основное в методе координат. Оно называется системой координат. В зависимости от того, где мы берем точку и как именно устанавливаем соответствие, мы будем иметь ту или иную систему координат. Начнем с наиболее простой — прямоугольной декартовой системы координат на плоскости.

Возьмем две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy (рис. 15), которые назовем *осями координат,* соответственно осью абсцисс и осью ординат. Точку их пересечения O назовем началом координат. Если M — произвольная точка плоскости, то ее координатами x, y назовем соответствующие расстояния до осей координат. Координату x назовем *абсциссой,* координату y — *ординатой* точки M. Будем записывать это так: $M(x, y)$. Если точек несколько, будем у координат писать индексы: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,... В зависимости от того, где находится точка, ее координаты будут иметь те или иные знаки. Так, на рис. 15 обе координаты положительны. Это случай расположения точки в первом квадранте. Квадрантом называют одну из четырех частей, ко-

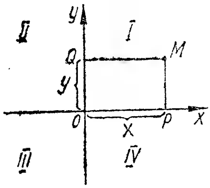


Рис. 15

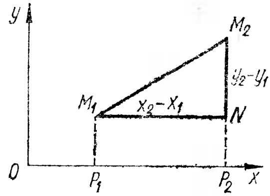


Рис. 16

торая получается при разбиении плоскости осями координат. Если точка находится во втором квадранте, ее абсцисса отрицательна, а ордината положительна и т. д. Для точек, расположенных на оси абсцисс, ординаты равняются нулю, а для точек оси ординат нулевыми являются абсциссы. Обе координаты начала координат равняются нулю.

Каждая линия на плоскости — это множество (геометрическое место) точек. Любую линию, как и точку, можно было бы задать с помощью некоторой совокупности чисел — ее координат. Однако, принимая точку за основной геометрический образ и рассматривая линию как совокупность точек, мы сделаем иначе — совопоставим с каждой линией некоторое уравнение (уравнение этой линии). Если какая-то точка принадлежит линии, ее уравнение должно удовлетворяться координатами точки. Таким образом, уравнение линии — это условие, которому удовлетворяют координаты произвольной точки линии и не удовлетворяют координаты точек, которые линии не принадлежат.

Решим теперь несколько основных задач. Следует обратить внимание на то, что каждый раз мы будем решать задачу, имея конкретное расположение точек относительно осей координат. Однако мы всегда должны следить за тем, чтобы аналитические выражения, которые мы используем, от такого расположения не зависели. Тем самым и конечные формулы, и уравнения будут справедливы для любого расположения.

1. Расстояние двух точек.

Пусть имеем две какие-нибудь точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 16). Из рисунка легко видеть, что $M_1N=x_2-x_1$, $NM_2=y_2-y_1$. Тогда по теореме Пифагора получаем искомую формулу:

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (4)$$

Эта формула справедлива для любого расположения точек, а не только для того, который у нас изображен на рисунке.

2. Уравнение окружности.

Пусть r — радиус круга, $C(a, b)$ — его центр, точка $M(x, y)$ — произвольная точка окружности. Тогда по формуле (4), определяющей расстояние двух точек, получаем (после возведения в квадрат):

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{5}$$

Это уравнение можно записать в виде:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0, \tag{6}$$

где

$$A=-2a,\ B=-2b,\ C=a^2+b^2-r^2.$$

3. Уравнение прямой.

Пусть l — произвольная прямая, образующая с осью абсцисс угол α и отсекающая от оси ординат отрезок длины b, $M(x, y)$ — произвольная точка прямой (рис. 17). В таком случае, как видно из рисунка, $NM=y-b$, $BN=x$, поэтому

$$y=kx+b, \tag{7}$$

где $k=\operatorname{tg}\alpha$. Это уравнение можно переписать так:

$$Ax+By+C=0. \tag{8}$$

Уравнение (8) может быть сведено к виду (7), если положить:

$$k=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{B}.$$

Всякое уравнение вида (8) есть уравнение прямой, всякое уравнение вида (6) есть уравнение окружности.

Решим теперь следующую задачу: найти геометрическое место (множество) точек, отношение расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная.

Когда мы говорим «найти», то это означает, что мы прежде всего должны выяснить, не находится ли упомянутое множество точек среди известных нам кривых. Пользуясь методом координат, мы должны найти урав-

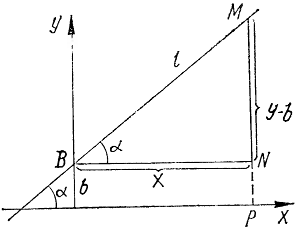


Рис. 17

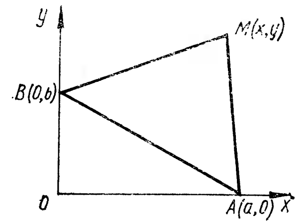


Рис. 18

нение искомого множества и выяснить, не совпадает ли найденное уравнение с одним из известных нам. Если совпадение есть — задача решена. Однако если совпадения не будет, то это еще не будет означать, что среди известных кривых найденной кривой нет, надо еще проверить, а нельзя ли свести найденное уравнение к одному из известных путем подходящего преобразования системы координат. Если сведение невозможно, то мы приходим к новому геометрическому месту точек.

Итак, возьмем на плоскости некоторую прямоугольную декартову систему координат. Не нарушая общности, будем считать заданные точки расположенными на осях координат. Тогда их координаты будут такими: $A(a, 0)$, $B(0, b)$ (рис. 18). Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка искомого геометрического места точек. Тогда, в соответствии с задачей,

$$\frac{AM}{BM} = \lambda, \tag{9}$$

где λ — величина данного отношения. По формуле (4) имеем:

$$AM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad BM = \sqrt{x^2 + (y-b)^2}.$$

Если внести это в равенство (9), возвести обе части в квадрат и перенести все в левую часть, то мы получим:

$$(1-\lambda^2)(x^2+y^2) - 2ax + 2\lambda^2 by + a^2 - \lambda^2 b^2 = 0. \tag{10}$$

Возможны два случая:

1) $\lambda = 1$. Уравнение (10) принимает вид:

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A=-2a$, $B=2b$, $C=a^2-b^2$. Но это есть уравнение (8), т. е. уравнение прямой. Этого и следовало ожидать, так как при $\lambda=1$ искомое геометрическое место точек будет множеством точек, равноудаленных от точек A и B, а это есть, как известно, перпендикуляр к отрезку AB, проведенный через его середину. Мы сейчас, таким образом, пользуясь методом координат, установили тот факт, что множество точек, равноудаленных от концов отрезка, есть прямая линия. Этот простой факт, разумеется, легко устанавливается и без метода координат. Есть, однако, множество других фактов, где метод координат оказывается незаменимым.

2) $\lambda\neq 1$. Уравнение (10) в этом случае может быть приведено к виду:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0,$$

где

$$A=-\frac{2a}{1-\lambda^2},\quad B=\frac{2\lambda^2 b}{1-\lambda^2},\quad C=\frac{a^2-\lambda^2 b^2}{1-\lambda^2}.$$

Но это — уравнение (6), т. е. уравнение окружности. Таким образом, искомое геометрическое место точек является окружностью.

Окружность имеет множество определений. Определенная так, как это было только что сделано, она носит название *окружности Аполлония* (по имени одного из величайших геометров Древней Греции Аполлония Пергского).

Подобным же образом решаются и другие задачи. Однако назначение аналитической геометрии не только в таком «узнавании» вида кривой по ее уравнению, т. е. сопоставлении каждого вновь получаемого уравнения с уравнениями, которые получены ранее. Имея уравнение, мы можем, если это позволяют наши методы, найти все объективно существующие геометрические свойства кривой. Зная эти свойства, мы, если есть к тому основания, сумеем найти и физическую природу этих свойств.

Мир в координатах Заставив алгебру работать на геометрию (да и не только на геометрию, но и на физику, химию, биологию, географию и т. д.), Декарт, по сути, предвосхитил многие из тех идей, которые мы считаем достоянием более поздних времен. Так, например, изучая законы человеческого мышления, в частности законы арифметических операций, мы приходим к их определенным моделям и находим возможность заставить выполнять эти операции машину. Для машины совершенно безразлично, какого рода информацию в нее вводят, лишь бы эта информация обладала заданными формально-логическими свойствами, которые входят в ее компетенцию. Она переработает любую такую информацию по тем законам, которым ее «научили», и выдаст готовый результат, от человека же, введшего информацию, зависит, какое истолкование дать этому результату.

В рассматриваемом нами случае роль такой математической машины играет алгебра, для которой совершенно безразлично, какое конкретное значение имеют те или иные объекты — геометрическое, физическое или иное. Раз они обладают заданными свойствами, которые подпадают под компетенцию алгебры, они будут обработаны ею, как и все иные объекты, с теми же свойствами.

Математика, взятая в целом,— одна из форм познания реальной действительности. Характерными ее особенностями являются абстрактный характер ее истин (причем эта абстрактность намного превосходит то, что наблюдается в других науках), а также своеобразный пространственно-количественный подход к явлениям внешнего мира.

Алгебра — та область математики, в которой особенности последней проявляются наиболее выпукло. Она достигла такой ступени абстракции, которой все еще не достает геометрии. Объекты геометрии все еще остаются достаточно конкретными — это пространственные формы реального мира. Мыслить категориями таких форм — неотъемлемое свойство человеческого ума, а потому математика без геометрии в принципе невозможна. Однако, оставаясь областью математики с конкретными объектами исследования, геометрия неизбежно должна подпасть под влияние области, полностью освободившейся от такой конкретности. Таковою в данном случае является алгебра.

Не следует думать, что в результате открытия Декарта алгебра подчинила себе геометрию. Подчинения не получилось. Получилось лишь соединение обеих областей в одно целое в виде аналитической геометрии, соединение, одинаково благотворное как для алгебры, так и для геометрии. Переходя через посредство метода координат от геометрии к алгебре, мы сначала как бы полностью забываем о том, что имеем дело с геометрией. Но затем, когда алгебра помогла нам найти некоторый результат, к геометрии следует обязательно вернуться, чтобы узнать, что же означает полученный результат на языке геометрии. Без такого возврата, без необходимости такого возврата аналитическая геометрия, очевидно, была бы не нужна.

Сейчас трудно представить какую бы то ни было область знания, где не было бы в той или иной форме аналитической геометрии.

Когда мы видим над койкой больного температурную кривую,— это аналитическая геометрия. Здесь по оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — температура. Взглянув на эту температурную кривую, каждый врач мгновенно составит себе четкое представление о течении болезни, по крайней мере в одном из ее проявлений.

Когда штурман прокладывает на карте маршрут корабля,— это тоже аналитическая геометрия. Земная поверхность предварительно отображается на плоскость, в результате чего получается географическая карта. Координаты каждой точки такой карты есть некоторые функции географических координат (широты и долготы) соответствующей точки на земной поверхности, их при желании можно сделать равными этим координатам. Каждый маршрут — это некоторая кривая. Кривая будет той или иной в зависимости от того, какие цели ставит перед собой штурман. Если эта цель — направить корабль по кратчайшей линии на земной поверхности, получится одна кривая. Если заставить его пересекать все меридианы под одним и тем же углом (это упростит задачу рулевого — надо будет держать руль все время на одном и том же румбе), получают так называемую локсодрому. На разных картах такая локсодрома выглядит по-разному, штурману надо знать, как выглядит ее уравнение в тех координатах, к которым отнесена карта. Зная уравнение, он вычислит координаты точек, через которые пройдет кривая, а следовательно, отметит и те места, через которые пройдет корабль. Зная уравнение, он может вычислять (точно или приближенно) длину дуги кривой, а потому будет знать время, в течение которого корабль, двигаясь по заданной траектории, придет в определенный пункт земной поверхности и т. д.

А как летают космические корабли, по каким траекториям, как рассчитать эти траектории?

Корабли летят по траекториям, определяемым законом всемирного тяготения. Если речь идет об отдельном корабле и одной отдельно взятой планете, около которой он пролетает, то траектория — одна из кривых второго порядка. Такая траектория будет иметь определенное уравнение в какой-либо системе координат, связанной с Землей, с Солнцем или с «неподвижными» звездами. Аналитическая геометрия дает возможность найти это уравнение и тем самым указать положение корабля в любой момент времени.

Следует, однако, сказать, что каждая планета, каждый космический корабль — это не точки, а потому пути движения корабля — это далеко не те идеальные кривые второго порядка, которые получаются в соответствии с законом всемирного тяготения. Равным образом, космический корабль движется в поле не одной планеты, а ряда планет. Траектория его оказывается намного сложнее, чем элементарная кривая второго порядка. Рассчитать такую траекторию с помощью той аналитической геометрии, с которой мы познакомились выше, не представляется возможным. На помощь приходят более сильные методы современного математического исследования, но в основе многих из таких методов лежит все тот же метод координат.

Земля на кончике пера

Метод координат позволил французскому астроному Леверье, исследуя неправильности в движении планеты Уран, т. е. отклонения траектории планеты от той, которую она должна была бы иметь по закону всемирного тяготения, высказать предположение о влиянии на ее движение неизвестной планеты. Вскоре новая планета была открыта. Это был, как все прекрасно знают, Нептун. Радости ученых не было пределов — ура! Леверье открыл новую планету «на кончике пера»!

Что это? Обычное научное открытие? А может быть, это романтика научного подвига? Что же такое романтика и что романтикой не является?

...Ослепительно сверкают под нестерпимо палящими лучами солнца белые барашки на гребнях легких волн, и три грациозных каравеллы с гордо выгнутыми полукружнями парусов тихо скользят по безбрежной поверхности изумрудного океана. Ветер мягко и волнующе ведет свою бесконечную песню среди туго натянутых полотнищ, и загорелый бородатый матрос из бочки на грот-мачте напряженно всматривается в покрытую голубоватой дымкой даль в неизбывной надежде увидеть, наконец, эту землю, пусть дикую и неприветливую, но так долго ожидаемую и желанную...

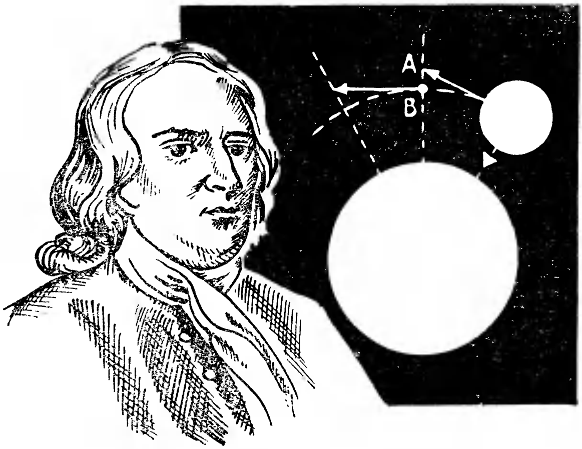
Или вот так, как у Лермонтова в романе «Герой нашего времени»:

«...И теперь здесь, в этой скучной крепости, я часто, пробегая мыслию прошедшее, спрашиваю себя, отчего я не хотел ступить на этот путь, открытый мне судьбою, где меня ожидали тихие радости и спокойствие душевное... Нет! я бы не ужился с этой долею! Я, как матрос, рожденный и выросший на палубе разбойничьего брига; его душа сжилась с бурями и битвами, и, выброшенный на берег, он скучает и томится, как ни мани его тенистая роща, как ни свети ему мирное солнце; он ходит себе целый день по прибрежному песку, прислушивается к однообразному ропоту набегающих волн и всматривается в туманную даль: не мелькнет ли там на бледной черте, отделяющей синюю пучину от серых тучек, желанный парус, сначала подобный крылу морской чайки, но мало-по-малу отделяющийся от пены валунов и ровным бегом приближающийся к пустынной пристани...»

Кто посмеет сказать, что это не романтично? Это всегда было, есть и будет романтичным, каких бы высот ни достиг научно-технический прогресс. Это романтика моря, романтика путешествий и географических открытий, это Жюль Верн и Майн Рид, это Кук и Лаперуз, это покрытые экзотическими зарослями острова и высоченные голубые айсберги...

Ну, а если вот так:

...Лампа под белым абажуром мягким светом заливает небольшую комнату, уставленную рядами шкафов и полок. На столе беспорядочно разбросанные листы бумаги, на которых — ничего, кроме формул и коротких пояснений. За столом молодой человек (пусть пожилой человек, пусть с всклокоченными волосами, а пусть и нормально, как все люди, причесанный). Он то пишет что-то на листках, то бросает написанное в мусорную корзинку под столом, то встает и ходит по кабинету, то ложится на диван...



Вот так и Леверье свыше ста лет назад. Имя исследователя, имя путешественника было бы окружено романтическим ореолом, если бы ему, после долгих, полных опасности и приключений, странствий удалось открыть новый архипелаг, новый материк, новый горный массив. Открытие же Леверье мы к разряду романтики, очевидно, не отнесем, по крайней мере при первом взгляде на него. А почему? Разве это не есть подвиг? Разве это не есть триумф ума и непреклонной настойчивости? Разве ученый, водя пером по бумаге, испытал меньше душевного волнения, чем матрос, сидящий в бочке на грот-мачте каравеллы? Человек подарил миру целую планету! И сделал это, не сходя с места, не обшаривая с помощью межпланетного корабля просторы нашей Солнечной системы. Отказать такому человеку в романтическом ореоле мы не имеем права. Это — тот же Лаперуз, тот же Кук.

Однако, восторгаясь открытием Леверье, мы почему-то забываем о том, что это открытие было вовсе не единственным в своем роде. В XVII ст., опираясь на свою теорию тяготения, И. Ньютон высказал предположение, что Земля не является шаром. Действительно, поскольку экваториальные ее части испытывают бóльшие центробежные силы, противостоящие силам притяжения к центру, по сравнению с частями, прилежащими к полюсам, то, очевидно, и отстоять от центра они будут дальше.

Зная скорость вращения Земли и ее размеры, можно приблизительно подсчитать и величину сжатия.

Парижская академия наук организовала серию экспедиций, имевших целью путем непосредственных измерений на земной поверхности выяснить характер искривленности меридиана. Экспедиции проводились на разных широтах и подтвердили предположения Ньютона.

Участником высокоширотной экспедиции оказался, в частности, и молодой академик Мопертюи (он возглавил экспедицию). Доклад Мопертюи на заседании академии произвел сенсацию. Дело в том, что незадолго перед этим экспедиция академии, возглавляемая Кассини, производила градусные измерения меридиана на территории Франции. Экспедиция получила результаты, касающиеся искривленности меридиана на этой территории. Экстраполировав эти результаты на весь меридиан, Кассини пришел к выводу, что Земля не сжата, а, наоборот, вытянута вдоль оси.

Открытие Мопертюи с блеском опровергали этот в высшей степени курьезный вывод. Вольтер, близкий друг Мопертюи, поздравил последнего с замечательным научным достижением и с тем, что ему, Мопертюи, удалось «расплющить земной шар, а заодно и графа Кассини». Однако через несколько лет дружбе с ученым пришел конец. И, как и следовало ожидать, похвалы уступили место хуле. Мопертюи? Кто он такой? И что он сделал? В результате появились следующие стихи, полные свойственного Вольтеру сарказма:

Посланец физики, отважный мореход,
Преодолев и горы, и моря,
Влача квадрант средь снега и болот,
Почти что превратившись в лопаря [1],
Узнал ты после множества потерь,
Что знал Ньютон, не выходя за дверь!

Не будем вмешиваться в ссору двух выдающихся людей. Это их личное дело. Но вот что интересно — подметил-таки великий острослов самое характерное в факте: Ньютон действительно установил сплющенность Земли, не выходя за дверь. На кончике пера! Как потом Леверье! Но, странная вещь — о Леверье говорят все именно в контексте, где хотят подчеркнуть могущество математики. О Ньютоне тоже говорят много, даже, есте-

[1] Экспедиция проводилась в Лапландии.

ственно, больше, чем о Леверье, но почему-то не обращают внимания на то, что ведь открытие Ньютона того же самого порядка, что и открытие Леверье, и сделано оно было на много десятков лет ранее Леверье. И подобных примеров множество.

Здесь необходимо сделать одну оговорку. В соответствии с Ньютоном, Земля, испытывая сжатие по оси, оказывается эллипсоидом вращения, т. е. поверхностью, образованной вращением эллипса вокруг его малой оси (рис. 19). На более точных картах, чем те, где Земля рассматривается как шар, наша планета принимается за такой эллипсоид. Он называется *референц-эллипсоидом.*

Однако, если придерживаться еще большей точности, то Земля не будет и эллипсоидом вращения. Она лишь приблизительно напоминает эллипсоид. Истинная форма Земли — это ее собственная форма, которая по этой причине и названа *геоидом.* Слово «геоид» в переводе означает поверхность, похожую на Землю. Это не та поверхность, которая образована всеми впадинами и возвышенностями Земли. Мы получим геоид, если прорежем всю Землю сетью тонких каналов и заполним их водой. Убрав теперь все то, что оказывается выше воды, мы и придем к геоиду.

Мысль о том, что Земля имеет неправильную форму, высказал великий французский математик и механик Лаплас. Он же предложил и название для такой формы (геоид).

Кстати, догадаться, что мы имеем дело вот с таким телом неправильной формы, это ведь не меньше, чем открыть Нептун. Это открытие тоже было сделано на кончике пера, средствами современной Лапласу математики. Эта математика была бы немыслима без метода координат и его естественного следствия — дифференциального и интегрального исчисления.

Использование метода координат не только автоматизирует, упрощает решение геометрической задачи, оно в значительной мере помогает и самой геометрической интуиции. Если бы мы не приучили себя каждую функцию одного аргумента представлять в виде некоторой плоской кривой (рис. 20), а функцию двух переменных — в виде некоторой поверхности (рис. 21) (здесь уже используется метод координат в пространстве), то весьма сомнительно, сумели ли бы мы обнаружить даже простейшие свойства таких функций. Раз возникнув, такое пред-

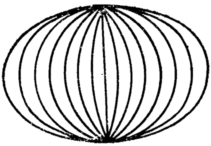


Рис. 19

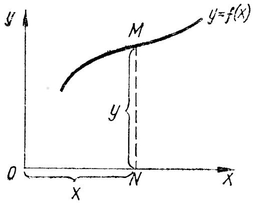


Рис. 20

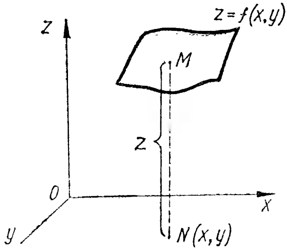


Рис. 21

ставление дает нам возможность предположить у функции такие свойства, сама мысль о которых без этого представления нам бы, вероятно, не пришла и в голову. Чуть позднее, вернувшись к великим задачам древности и следствиям, к которым привело упорное нежелание математиков отказаться от поисков решения этих задач, мы увидим, как работает метод координат там. Сейчас же вернемся к нашему герою, которого мы давно уже потеряли из виду.

Ученый д'Артаньян Что же произошло с творцом аналитической геометрии после того, как мы оставили его в конце 1918 г. в голландском городе в обществе своего учителя и друга Бекмана?

Мысли о новой математике еще не были приведены в такое состояние, при котором их можно было бы записать в виде математического или философского рассуждения. Последнее случилось лишь в 1637 г., когда, работая над своим капитальным сочинением «Опыты», Декарт включил в него и небольшой раздел под названием «Геометрия». Однако основные идеи, содержащиеся в «Геометрии», были намечены уже тогда, когда молодой солдат-волонтер находился в Бреда.

Полк, в котором служил Декарт, бездействовал. Провинциальная Голландия была уже достаточно хорошо изучена. В частности, Декарт начинает довольно сносно понимать голландский язык и говорить на нем. Впереди рисовались, одна заманчивее другой, европейские страны. Молодой солдат решает ехать в Германию под предлогом службы в католических войсках. В то время в Европе уже шла Тридцатилетняя война. Огибая театры военных действий, пришлось ехать кружным путем — через Копенгаген, Данциг, Польшу, Венгрию. Достигнув

Германии, он записывается в армию герцога Максимилиана Баварского. Однако его меньше всего прельщает мысль о защите интересов германского императора Фердинанда, для которого, собственно, и набиралась армия. Цель у Декарта была совсем иной — расширить свои знакомства в научном мире, и сделать это было лучше всего при дворе императора.

Декарт, как мы уже отмечали выше, посетил Ульм, где ему как раз и приснились три его знаменитых «вещих» сна.

Сохранилось очень мало достоверных сведений об участии Декарта в военных операциях. Возможно, что ему довелось участвовать в одном из центральных сражений Тридцатилетней войны — битве у Белой горы, под Прагой. Мы знаем то, что случилось после этой битвы.

Надоевшая ему армия оставлена, все военные перипетии (для него) позади, и можно уже, распрощавшись с Германией, возвращаться домой.

Молодой солдат-ученый вместе со своим слугой, преодолев множество препятствий, вызванных войной, добирается, наконец, до Фрисландии и за умеренную плату договаривается со шкипером одного небольшого судна о переезде во Францию.

Крохотное судно было приспособлено только для плавания вдоль берега. Кроме капитана и его помощника, экипаж насчитывал еще несколько матросов, в обязанности которых входила забота о парусах на двух невысоких мачтах и мытье потрескавшейся палубы. Пассажирам отвели небольшую каюту на корме. Поздней ночью, устав ворочаться на деревянной койке в тесной и душной каюте, Декарт вышел на палубу и, облокотившись на веревочный барьер, окружавший ее, с удовольствием отдался очарованию ночного Северного моря. Яркая луна развернула на черной воде ослепительную дорожку, мерно покачивающуюся в такт колыхающимся волнам и призывно манящую к чему-то неизведанному, таинственному, вечному. Иногда набегающая волна, с шумом ударившись о борт, разлеталась мириадами сверкающих капель и обдавала замечтавшегося морехода соленой прохладой своих неразгаданных глубин. Иногда в феерическом свете великолепной луны поверхность моря внезапно перерезалась острым и решительным плавником какого-то его неизвестного обитателя и вновь надолго замирала в своей колеблющейся неподвижности.

Вдали, почти у самого горизонта, мелькали светящиеся точки — может быть, бортовые огни проплывавших больших кораблей, может быть, сполохи далекой и неслышимой грозы.

Стоя в тени косо нависающего над бортом большого паруса, Декарт медленно перебирал в памяти и только что промелькнувшие события военной жизни, и картины далекого детства, проведенного в маленьком Лаэ на берегу очаровательного ручья, и годы учения у иезуитов, в своей философии не поднимавшихся выше общепринятых представлений о смысле и содержании преподававшихся наук, но хорошо отдавших себе отчет и в тех целях, к которым они вели своих учеников, и в тех средствах, с помощью которых эти цели могли быть достигнуты...

Понадобилось какое-то сознательное усилие для того, чтобы стряхнуть с себя оцепенение и прислушаться к словам, долетавшим от штурвального колеса. Декарт узнал голоса помощника капитана и того чернобородого широкоплечего матроса, который поразил его двусмысленным выражением своего лица еще в то время, когда они грузились на корабль. За деланным безразличием Декарт усмотрел тогда плохо скрытое жадное внимание к нему самому, а еще больше к тяжелому сундуку, который его слуга, осторожно ступая по сходням, заносил на корабль.

Разговаривали по-голландски.

— Ты уверен, что француз не понимает голландского языка? — спросил помощник капитана.

— Так же, как в том, что сейчас ночь,— ответил матрос. — Еще в порту я нарочно крикнул долговязому Гуддену, который стоял рядом с солдатом, чтобы он остерегался его длинного носа больше, чем его длинной шпаги, однако ни француз, ни его слуга не повели даже ухом. Да если бы такое было сказано у нас, любой парень полез бы в драку.

— Ну, это еще ни о чем не говорит,— возразил помощник капитана. — Впрочем,— добавил он после некоторого молчания,— возможно, что ты и прав. Тем лучше для нас.

Разговаривающие замолчали. Несколько минут спустя снова заговорил помощник капитана.

— Когда ты хочешь разделаться с ними? — спросил он.

— Завтра с наступлением темноты,— ответил чернобородый. — Надо, чтобы они не успели запереться в своем ящике. Я уже предупредил Гуддена, у нас все готово.

— Капитан знает?

— Гудден сказал ему. Только чур. Сундук идет мне, все остальное могут разделить между собой другие.

Снова молчание, и снова его прервал помощник капитана.

— Будет так, как скажет капитан. Не зарывайся, Черный. Тебе уже раз устроили казнь святого Варфоломея, когда ты попытался обойти других. Смотри, после второго раза тебе уже не придется дожидаться третьего — ты понесешь в ад собственную шкуру своими же руками.

Декарт слышал, как чернобородый сделал шумный выдох через ноздри и недовольно засопел. Времени терять было нельзя. Осторожно ступая по наиболее густо затененным участкам палубы, Декарт добрался до дверей каюты, быстро закрыл ее на засов и, стараясь не произвести ни одного лишнего звука, разбудил слугу. Как пригодилось ему знание голландского языка, который он так быстро выучил с помощью великодушного Бекмана! И как чудесна его звезда, которая вытолкнула его на палубу именно в тот момент, когда пираты так неосторожно уточняли план своего гнусного злодеяния. Против этого плана был быстро выработан контрплан. Только молниеносность и решительность могли обеспечить ему успех.

На рассвете обрисовывались контуры извилистого берега, открывшегося с левого борта. Ветер переменил направление, и вся команда была вызвана наверх, к парусам.

Когда капитан появился на палубе, корабль уже плавно удалялся от берега, огибая далеко выдающуюся в море косу.

Вдруг двери пассажирской каюты широко распахнулись, и оба француза стремительно выскочили из нее. Ловким ударом Декарт свалил с ног капитана и в то же время дуло мушкета, который держал его слуга, было приставлено к затылку поверженного. С пистолетом в одной и шпагой в другой руке Декарт молниеносно обернулся ко всей остальной шайке и закричал по-голландски:

«Ни с места, негодяи! Одно движение — и мы продырявим голову вашему капитану».

Пираты, застигнутые врасплох, застыли в неподвижности. Оказывается, француз знал голландский язык! Вот тебе и шутка с его длинным носом.

Дальнейшее было делом нескольких минут. Выскочив на капитанский мостик, Декарт приказал зарифить паруса, сделать поворот на левый галс, и вскоре корабль мягко зарылся в прибрежный песок. Переведя дуло пистолета на капитана, Декарт приказал своему слуге побросать вещи на землю, спрыгнуть с корабля и взять на прицел помощника. После этого спрыгнул сам. Отбросив шпагу, он взял в левую руку второй пистолет.

Под прицелом трех стволов пираты вновь распустили паруса, оторвались от берега и через некоторое время удалились.

Смельчаки были свободны. Угрозы пиратов, потрясающих кулаками и, судя по их движениям, изрыгающих проклятия, их уже нисколько не беспокоили. Перед ними была Франция. Несколько дней пути, и вот уже родная Турень встречает своего непоседливого сына и его верного оруженосца.

Нет, вероятно, какой-либо строгой закономерности в соотношении между смелостью научного мышления и личным мужеством ученого. Однако в подавляющем большинстве случаев из тех, что нам известны, одно оказывается в прямой зависимости от другого. Таким был Декарт, смелый ученый и бесстрашный человек. Он сам рассказал в своих воспоминаниях о стычке с пиратами во время морского путешествия. Ему удалось с помощью шпаги, которой он владел вероятно, с дартаньяновским мастерством, принудить пиратов пристать к берегу и дать возможность высадиться ему и его слуге. Возможно что и не в ночной темноте подслушал он разговор пиратов, возможно, что и не угрозой жизни капитана ему удалось подчинить себе всю команду, как об этом мы только что рассказывали, а возможно, что всё происходило именно так.

После нескольких лет жизни во Франции — путешествие в Италию. Декарт посетил Рим, Венецию, Флоренцию, Лорето. (Последнее рассматривалось им как выполнение обета, данного лоретской богоматери еще в то время, когда в «вещих» снах открылось ему существо новой, универсальной, по его словам, науки.) Жизнь в Париже полная светских развлечений, научных и литературных диспутов. Декарт всё более и более склоняется к мысли изложить на бумаге свои взгляды на вещи. К этому его склоняют и его многочисленные друзья. Однако Франция с ее религиозной нетерпимостью и светским абсолютизмом была мало пригодна для этой цели. Декарт снова подумал о милой и гостеприимной Голландии, добрую память о которой не сумела стереть и стычка с пиратами. Это была страна, где как нигде в другом месте, «можно наслаждаться полной свободой, где можно спать с полной безопасностью»,— писал он.

Большой непоседа, Декарт переезжает сначала в Дортрехт, к своему старому другу (по давности дружбы, но не по возрасту) Бекману. Спустя некоторое время он меняет Дортрехт на Франекер, а затем последовательно живет в Амстердаме, Лейдене, Девентере, Утрехте, Гардервике и др.

Здесь, в Голландии, Декарт и написал свою «Геометрию», совсем небольшое сочинение, которое, однако, по праву считается жемчужиной геометрической литературы.

Декарт, по его словам, был противником «кропания» толстых книг. Он говорил, что потомки будут ему благодарны не только за то, что он сказал, но и за то, чего он не сказал и тем самым дал им возможность и удовольствие додуматься до этого самостоятельно, с помощью, разумеется, тех концепций, начало которым он положил.

Если хочешь быть хорошим математиком

Во Францию ученый приезжает лишь несколько раз и то на непродолжительное время. Его трактатами зачитываются во всех странах Европы, имя его приобретает всемирную известность. Шведская королева Христина приглашает его переехать на жительство в Стокгольм. В числе прочих дел, которыми занимался Декарт в Стокгольме, была и работа над проектом устава Шведской академии наук. Но главным его занятием, по желанию королевы были регулярные занятия с нею самою философией. Декарту пришлось поступиться своими привычками. Еще с детства он усвоил обычай подолгу оставаться в постели поутру, предаваясь размышлениям над вопросами математики, физики, философии. Эти утренние часы были самым продуктивным временем. Мысли, пришедшие в эти часы, оставалось потом лишь привести в порядок и записать.

Привычке Декарта был положен конец. Нужно было, по примеру неугомонной королевы, вставать ранним утром и в пять часов уже начинать занятия с нею. Декарт с горьким юмором говорил тогда, что если хочешь быть хорошим математиком и сохранить при этом здоровье, то следует расстаться с постелью лишь тогда, когда почувствуешь желание сделать это. Простудившись во время продолжительных поездок во дворец в холодной карете, ученый получил воспаление легких и спустя девять дней после начала болезни умер. Это случилось 11 февраля 1650 г. Он не дожил трех недель до 54-х лет.

Спустя 16 лет, в 1666 г., его прах был перевезен в Париж. Гроб был установлен сначала в церкви Павла, а затем, в 1667 г., был перенесен в усыпальницу великих людей Франции — церковь святой Женевьевы, покровительницы Парижа, знаменитый Пантеон, в котором нашли свое последнее пристанище останки многих выдающихся умов страны.

Время, которое нуждалось в титанах

Мы не пишем истории математики. Наша задача — найти в этой истории такие эпизоды, которые бы представляли ее в наиболее интересном виде привлекательном не только для самих математиков, но и для тех,кто имеет к математике лишь отдаленное отношение. Коль скоро, однако, мы заговорили об одном из величайших открытий в истории математики, то совершенно очевидно, что мы не можем обойти молчанием и тех обстоятельств, которые явились причиной этого открытия. Потому ли оно произошло, что появился такой выдающийся ученый, как Декарт? А если бы не было Декарта? А если бы он появился на несколько столетий позднее?

Наверно, что-нибудь бы изменилось. Наверно, коечто приняло бы иные формы. Но ни в чем существенном положение не изменилось бы. Не было бы Декарта, был бы другой или другие ученые, которые выразили бы насущнейшие потребности своего времени. Открытие Декарта — вовсе не следствие только личностных качеств самого Декарта. Оно было подготовлено всем ходом исторического развития человеческого общества. Позволяя себе некоторую категоричность суждений, скажем, что если бы не было Евклида,— не было бы и Декарта. Или если бы был Декарт, но не было бы потребности в его открытии,— это был бы не тот Декарт.

Семнадцатый век, типичным представителем которого был Декарт, является поворотным не только в математике, но и в естествознании вообще. Причина бурного развития естествознания в XVII ст. заключается в необычайно возросших экономических ресурсах европейских государств, в том, что на арену политической жизни выступил новый класс — буржуазия. Движимый поисками новых путей для своего развития, этот класс ломает все преграды, которые устанавливает на его пути средневековая аристократия. Являясь в то время прогрессивной частью общества, буржуазия смело разрушает догматы христианской религии, верной прислужницы дворянского абсолютизма, не успевшей еще приспособиться к потребностям нового класса. Научное естествознание, находившееся под проклятием церкви, утверждается буржуазией в качестве одного из основных средств ее господства. Во многих странах создаются научные объединения, академии, находившие щедрую поддержку со стороны финансовых магнатов, начинают издаваться научные журналы, оживляется обмен мнениями между учеными, оживляется переписка. Особое развитие получает механика. Ее положения распространялись на все явления жизни, какой бы природы они ни были. Для того времени это было прогрессивным явлением, и лишь впоследствии механистическое объяснение мира стало служить тормозом в развитии научного естествознания.

Новые задачи, возникавшие перед исследователями, требовали и новых методов исследования. Методы древних греков и средневековых ученых уже не могли удовлетворить возросших потребностей. Эти методы носили слишком узкий характер, делавший их пригодными для решения лишь ограниченных классов задач, или приводили к слишком утомительным, громоздким построениям.

Перед новой наукой встала потребность в создании таких методов, которые вместе с возможностью наиболее широких приложений были бы достаточно простыми и компактными. XVII ст. и ознаменовалось появлением трех исключительных по силе и значению созданий человеческого ума — логарифмов, аналитической геометрии и исчисления бесконечно малых (дифференциального и интегрального исчисления). Эти три открытия можно было бы коротко определить следующим образом: метод наиболее экономного и эффективного выполнения вычислений, метод сведения разнообразных процессов реальной действительности к общим законам алгебры и, наконец, метод пределов, наиболее точно отражающий непрерывность механических процессов.

Создание новых методов, свидетельствуя о расцвете математики, привело к еще более бурному ее развитию — за несколько десятилетий новые методы дали возможность получить столько результатов, сколько старые не могли дать и за столетия.

Уравнения

А теперь вернемся к нашим великим задачам и вновь поставим вопрос: можно или нельзя их решить с помощью циркуля и линейки? Теперь, когда мы ознакомились с методом координат, можно попытаться найти ответ на этот вопрос с помощью алгебры.

Что мы, собственно, делаем, когда решаем задачу с помощью циркуля и линейки? Мы проводим прямые, окружности, находим точки их пересечения, через найденные точки проводим новые прямые, новые окружности, делаем эти точки центрами новых окружностей, выбираем произвольно какие-то точки на плоскости, на заданных прямых, окружностях и т. д. Выберем на плоскости некоторую прямоугольную декартову систему координат. Тогда каждая точка этой плоскости будет иметь определенную пару координат (a, b), каждая прямая — уравнение:

$$Ax + By + C = 0,$$

каждая окружность — уравнение:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Коэффициенты этих уравнений — определенные числа.

Пусть мы имеем теперь некоторую пару прямых, заданных или проведенных нами:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{11}$$

Найти точку их пересечения — это значит найти решение записанной пары линейных уравнений. Исключая из (11) y, придем к равенству:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + (C_1B_2 - C_2B_1) = 0. \qquad (12)$$

Решив уравнение (12), мы найдем y из любого уравнения (11). Таким образом, нахождение точки пересечения двух прямых сводится к решению линейного уравнения (12), коэффициентами которого являются некоторые целые рациональные функции коэффициентов уравнений (11), т. е. такие функции, которые получаются из указанных коэффициентов с помощью операций сложения, вычитания и умножения.

Пусть теперь нам заданы (или проведены нами) прямая и окружность. Их уравнения:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (13)$$

Чтобы найти точки их пересечения, надо решить эти уравнения. С этой целью из первого находим y и подставляем во второе:

$$y = -\frac{A_1x + C_1}{B_1},$$

$$x^2 + \left(\frac{A_1x + C_1}{B_1}\right)^2 + A_2x - B_2\frac{A_1x + C_1}{B_1} + C_2 = 0.$$

Последнее уравнение перепишем в виде:

$$(A_1^2 + B_1^2)x^2 + (2A_1C_1 + A_2B_1^2 - A_1B_1B_2)x + C_1^2 - C_1B_1B_2 + $$
$$+ C_2B_1^2 = 0. \qquad (14)$$

Пришли к квадратному уравнению. Коэффициенты этого уравнения — целые рациональные функции от коэффициентов уравнений (13). Правда, по сравнению с уравнением (12) эти рациональные функции включают в себя также и операцию возведения в степень (здесь — во вторую) коэффициентов уравнений (13). Эту операцию, однако, можно рассматривать как повторное умножение, поэтому данное ранее определение целой рациональной функции остается в силе.

Запишем уравнение (14) в виде:

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \tag{15}$$

его корни есть

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \tag{16}$$

Запомним, что коэффициенты a, b, c есть целые рациональные функции коэффициентов уравнений (13).

Пусть теперь нам даны две окружности:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Чтобы найти точки их пересечения, надо решить эти уравнения относительно x, y. Казалось бы, имеем два квадратных уравнения, поэтому решение их сведется, вероятно, к уравнению, степень которого не ниже четвертой. Между тем, это не так. Действительно, вычтем из первого уравнения второе и результат припишем к одному из уравнений (17) (например, к первому):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Коэффициенты второго уравнения — целые рациональные функции от коэффициентов уравнений (17). Легко видеть, что система (18) эквивалентна системе (17) (если ограничиться конечными решениями уравнений). Но система (18) есть система вида (13), с которой мы уже имели дело. Следовательно, ее решение, а потому и решение системы (17) сводится к решению системы (13) с коэффициентами, являющимися целыми рациональными функциями коэффициентов уравнений (17).

Если, например, нам нужно провести прямую через две заданные точки (координаты их заданы) или окружность заданного радиуса с центром в заданной точке (координаты центра и радиус заданы), то мы придем к уравнениям прямой и окружности, коэффициентами которых будут также целые рациональные функции от упомянутых координат и радиуса.

Итак, на первой стадии решение задачи с помощью циркуля и линейки сводится или к решению уравнения (12) (линейного), или к решению уравнения (15) (квадратного).

Что происходит на последующих стадиях? А происходит то, что через найденные точки мы снова проводим прямые или окружности. Мы снова придем к уравнениям вида (12) или (15), но теперь их коэффициенты будут уже целыми рациональными функциями от предыдущих коэффициентов, от каких-либо новых, которые у нас встретятся при решении задачи, а также от чисел вида (16). Например, пусть мы получили уравнение следующего вида:

$$\frac{-b_1+\sqrt{b_1^2-a_1c_1}}{a_1}x^2+\frac{-b_2+\sqrt{b_2^2-a_2c_2}}{a_2}x+1=0. \qquad (19)$$

Запишем его так:

$$-\frac{b_1}{a_1}x^2-\frac{b_2}{a_2}x+1=-\frac{\sqrt{b_1^2-a_1c_1}}{a_1}x^2-$$
$$-\frac{\sqrt{b_2^2-a_2c_2}}{a_2}x.$$

Возведем в квадрат обе части:

$$\left(-\frac{b_1}{a_1}x^2-\frac{b_2}{a_2}x+1\right)^2=\frac{b_1^2-a_1c_1}{a_1^2}x^4+$$
$$+\frac{b_2^2-a_2c_2}{a_2^2}x^2+2\frac{\sqrt{b_1^2-a_1c_1}\sqrt{b_2^2-a_2c_2}}{a_1a_2}x^3. \qquad (20)$$

Перенесем члены, не содержащие квадратных радикалов, в левую часть и снова возведем в квадрат обе части. Придем к уравнению 8-й степени:

$$p_0x^8+p_1x^7+\cdots+p_7x+p_8=0. \qquad (21)$$

Можно считать, что последнее уравнение приведено к общему знаменателю и знаменатель отброшен. Тогда все коэффициенты, очевидно, будут некоторыми целыми рациональными функциями от a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2. Это уравнение, идя обратным путем, мы можем привести к последовательности квадратных уравнений (20), (19).

Заметим, что степень уравнения (21) равна 8, т. е. 2^3. Это соответствует тому, что квадратное уравнение (19) было еще два раза возведено в квадрат. И так будет всегда — задача, решаемая с помощью циркуля и линейки, приводится к решению алгебраического (т. е. такого, у которого в левой части стоит полином) уравнения степени 2^n. Коэффициентами этого уравнения являются некоторые целые рациональные функции от параметров, которыми определяются произвольно выбираемые точки, прямые, окружности и т. д., причем не только на первой стадии, но и на последующих. Поскольку эти параметры произвольны, то ничто не мешает, в частности, считать их целыми числами. Если задача решается циркулем и линейкой при произвольном выборе параметров, то она, конечно, будет решаться и тогда, когда этими параметрами оказываются целые числа.

Итак, задача решается с помощью циркуля и линейки только тогда, когда алгебраическое уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0 \qquad (22)$$

с целыми коэффициентами имеет степень вида $n=2^k$ и сводится к цепи квадратных уравнений. Высказанное условие будет и достаточным условием разрешимости задачи циркулем и линейкой.

Следует обратить внимание на то, что произвольными целыми числами мы считаем параметры, функциями которых являются коэффициенты уравнения (22). Может случиться, что при произвольном выборе таких параметров коэффициенты уравнения не могут принимать произвольные, независимые друг от друга значения.

И еще одно замечание. Может случиться, что степень уравнения, к которому приводится решение той или иной задачи, не равна 2^n. Это еще не будет означать, что задача не решается с помощью циркуля и линейки. Если окажется, что при любом выборе целых параметров уравнение (22) имеет рациональные корни, то задача решается циркулем и линейкой. В этом случае говорят, что уравнение приводимо в поле рациональных чисел.

Таким образом, для невозможности решения задачи с помощью циркуля и линейки достаточно, чтобы уравнение (22), степень которого не есть степень двойки, было неприводимо в поле рациональных чисел.

Вернемся опять к трем великим задачам.

1. Задача об удвоении куба.

Если мы обозначим через a ребро данного куба, через x — ребро искомого, то, в соответствии с условиями задачи,

$$x^3 - 2a^3 = 0.$$

Это есть уравнение вида (22). Если степень не есть степень двойки. В то же время ни при каком целом a уравнение не имеет рациональных корней. Следовательно, задача об удвоении куба с помощью циркуля и линейки не решается.

2. Задача о трисекции угла.

Пусть 3α — величина угла, который надо разделить на три равные части. Мы заранее обозначили эту величину через 3α, чтобы потом не писать троек в знаменателях). Пусть

$$\cos 3\alpha = p.$$

Введем обозначение

$$\cos \alpha = x.$$

Если мы сумеем построить x, то сумеем построить угол α, т. е. третью часть заданного угла. Действительно, отложим отрезок длиной x (отрезок OA), в точке A восставим перпендикуляр и раствором циркуля, равным единице измерения, сделаем на нем засечку (точку B). Угол AOB равен α (рис. 22).

С другой стороны,

$$\cos 3\alpha = \cos (2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha =$$
$$= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = (2 \cos^2 \alpha -$$
$$- 1) \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha =$$
$$= 4x^3 - 3x.$$

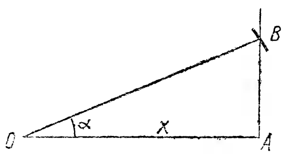


Рис. 22

Таким образом,

$$4x^3 - 3x - p = 0.$$

Это и есть уравнение, к которому приводит решение задачи о трисекции угла. Степень уравнения не есть степень двойки. Вместе с тем при произвольном выборе параметра p уравнение неприводимо в поле рациональных чисел. Это доказывает, что задача о трисекции угла с помощью циркуля и линейки не решается.

3. Задача о квадратуре круга.

Пусть r — радиус данного круга, x — сторона искомого квадрата. Тогда, приравнивая их площади, будем иметь

$$x^2 - \pi r^2 = 0. \tag{23}$$

К такому уравнению приводится решение задачи. Положим, как это мы уже делали прежде, радиус r равным произвольному целому числу. Мы не получим уравнения (22), так как в (22) коэффициенты — целые, а в (23) — нет. Но, может быть, путем многократного возведения в степень его можно привести к виду (22), т. е. к уравнению с целыми коэффициентами? Если это может быть сделано, то тогда мы прежде всего выяснили бы, есть ли степень полученного уравнения степень двойки, а если нет, то приводимо ли оно в поле рациональных чисел. Однако вопрос о том, приводится ли уравнение (23) (при целом r) к алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами, как нетрудно сообразить, сводится к вопросу о том, является ли само число π корнем уравнения такого вида. Число, являющееся корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, называется алгебраическим, число, не являющееся таким корнем, — трансцендентным.

Таким образом, возможность или невозможность решения задачи о квадратуре круга циркулем и линейкой сводится к вопросу о природе числа π — алгебраическое оно или трансцендентное? Если бы оказалось, что это число алгебраическое, то вопрос о решении задачи с помощью циркуля и линейки потребовал бы дальнейшего исследования. Если же число π трансцендентное, то вопрос имел бы отрицательный ответ — задача о квадратуре круга циркулем и линейкой не решается.

Лишь в 1882 г. немецкий математик Линдеман доказал трансцендентность числа π. Задача о квадратуре круга неразрешима.

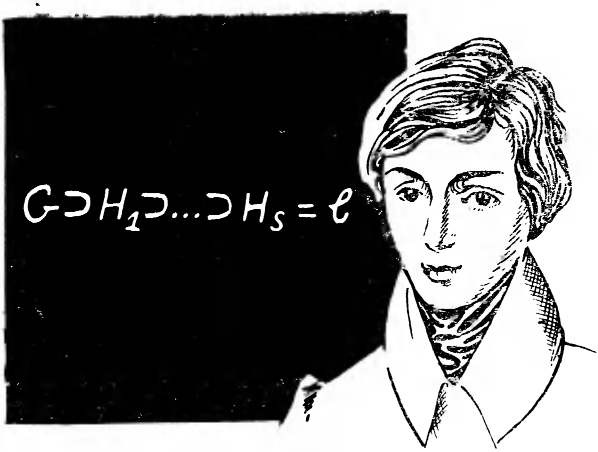
Как мы видели великие задачи древности через посредство метода координат привели нас к рассмотрению алгебраических уравнений. В частности, если коэффициенты такого уравнения — целые числа, то первый вопрос, который при этом возникает, какие числа могут быть корнями этого уравнения? Мы назвали такие числа алгебраическими. Все остальные числа есть числа трансцендентные. Одним из последних является число π. В курсе высшей математики доказывается, что трансцендентным является такое число, которое можно представить как предел

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x .$$

Есть ли другие? Оказывается, есть, притом их гораздо больше, чем чисел алгебраических. Если наугад взять точку на действительной оси, то вероятность того, что число, соответствующее этой точке, будет алгебраическим, равна нулю, а вероятность того, что это число трансцендентное, равна единице, т. е. почти все действительные числа есть числа трансцендентные. Числа алгебраические можно пересчитать, т. е. поставить во взаимно однозначное соответствие с натуральными числами. Трансцендентные числа такому пересчету не поддаются. Говорят, что множество алгебраических чисел счетно, множество чисел трансцендентных несчетно.

Галуа

Алгебраические уравнения с целыми коэффициентами — не необходимый конечный результат, к которому приводит исследование вопроса о разрешимости с помощью циркуля и линейки великих задач древности. В общем случае, когда (в процессе построения) точки, прямые, окружности выбирались произвольно, коэффициенты уравнения могли быть также произвольными, точнее — не обязательно целыми. Такое уравнение получается из некоторого начального квадратного уравнения путем неоднократного возведения в квадрат. Если, наоборот, подвергнуть алгебраическое уравнение серии извлечения квадратных корней, то мы придем в конечном итоге к такому квадратному уравнению, корни которого оказываются представленными через коэффициенты начального алгебраического уравнения с помощью последовательных извлечений квадратных корней. В этом случае говорят, что алгебраическое уравнение решается в квадратных ради-



калах. Вопрос о том, решается или не решается задача с помощью циркуля и линейки, сводится, таким образом, к вопросу, решается или не решается в квадратных радикалах соответствующее этой задаче алгебраическое уравнение.

Каковы же критерии того, решается или не решается в квадратных радикалах алгебраическое уравнение? Ответ на этот вопрос, причем не как на главный, а как на один из второстепенных, дается в теории Галуа.

Кто такой Галуа? Трудно найти, наверное, школьника, который бы не слышал о теории Галуа или не слышал бы имени Галуа. О нем написаны десятки превосходных книг. Возможно, что одной из лучших является книга, принадлежащая перу выдающегося польского физика Леопольда Инфельда «Эварист Галуа, избранник богов». Трудно рассказать о Галуа лучше, чем это сделал Инфельд.

Галуа был убит на дуэли, когда ему исполнилось немногим более двадцати лет. Галуа называли при жизни неистовым республиканцем, страстности которого, силе его убеждений и непримиримости к реакции не было предела. Есть много оснований полагать, что дуэль была спровоцирована политическими противниками Галуа, постаравшимися сделать все, чтобы убрать его со своего пути.

За несколько часов до гибели в письме, адресованном другу, на нескольких листочках бумаги Галуа изложил то, что впоследствии было названо теорией Галуа. Эта теория уже более ста лет привлекает к себе внимание математиков. Используя каждую минуту уходящей жизни, торопясь, о многом не договаривая, надеясь, что его поймут со временем, Галуа пишет свою лебединую песнь, вкладывая в нее всю силу своего гения.

Сейчас ни у кого не вызывает сомнений мысль о том, что Галуа был гениальным математиком. Но, как когда-то противники Галуа пытались очернить его и то дело, за которое он самоотверженно боролся, так сейчас многие не знают чувства меры, когда стараются превознести до небес заслуги математика, приписать ему такие достоинства, которыми он не обладал, сделать из него этакого ангела во плоти.

Известно, что Галуа дважды провалился на вступительных экзаменах в Политехническую школу. Каждый знает, что экзамен — это отчет о своих знаниях во всех тех областях математики, которые определены программой, это отчет о том, насколько ты правильно, последовательно, логически мыслишь, насколько умеешь использовать свои знания при решении задач. На экзамене могут принять во внимание, что в какой-то одной области ты на несколько голов перерос своих сверстников или даже самих экзаменаторов, но это ровно ничего не значит, если ты профан во всем остальном.

Почему Галуа провалился? Скорее всего потому, что, хорошо, очень хорошо разбираясь в теории решения алгебраических уравнений, он имел довольно шаткие представления о других разделах математики. Однако нет. Было положено в качестве незыблемой истины то, что Галуа плохо разбираться в чем-либо не мог, что вся математика была для него открытой книгой, которую он знал наизусть, не читая ее. Он провалился? — Значит виноваты экзаменаторы, которых последующая традиция постаралась оглупить, насколько это было возможно. В одном случае экзаменатор был настолько глуп, что задавал гениальному математику уж слишком элементарные вопросы, Галуа счел ниже своего достоинства отвечать на них. В другом — экзаменатор был еще глупее, он никак не мог понять тех совершенно тривиальных вещей, которые ему пытался объяснить экзаменующийся. Что оставалось делать Галуа? Да ничего другого, как размахнуться и запустить в голову неразбирающегося экзаменатора грязную губку, которой он только-что вытирал доску. Ух, как здорово! Ура господину Галуа! Так им и надо, посредственностям и рутинерам в науке! Он был молод. А молодость будто бы способна создавать гениальные произведения вот так просто, без всякого труда, без всякой подготовки.

Биографы Галуа любят рассказывать об эпизоде, который якобы случился с ним во время его пребывания в Подготовительной школе. Преподаватель школы Леруа, придя в класс, объявил ученикам, что ему стал известен один очень интересный результат по теории решения алгебраических уравнений, который был получен Штурмом, но что доказательства он сообщить не может, так как статья еще не вышла в свет. Все со вниманием слушают. Лишь на лице Галуа блуждает ироническая ухмылка.

— Месье Галуа, — обращается к нему учитель. — Вам кажется элементарным этот результат? Может быть, вы знаете и его доказательство?

Не говоря ни слова, Галуа встает, подходит к доске и берет в руки мел. На мгновение задумывается, и вот из-под его руки с лихорадочной быстротой начинают появляться на доске формулы. Одна, другая, третья... Галуа пишет не останавливаясь. Доска исписана, брошен мел, математик изящным движением стряхивает меловую пыль со своих пальцев. Теорема доказана.

Галуа было в то время 18 лет. Мы уже говорили о том, что к этому времени он многое узнал о решении алгебраических уравнений. Мог он задумываться и над тем, о чем говорится в теореме Штурма (о числе корней уравнения, заключенных в данном промежутке). Но дать с ходу доказательство теоремы, которую математики считают очень серьезной, юноше без основательной математической подготовки — этому трудно поверить. Высказать собственные, даже дельные и остроумные догадки о предмете, пояснить свою мысль на примере — это куда ни шло, но доказывать теоремы, стоя у классной доски, причем вот так сразу, в чистом виде, — это уж слишком.

Мы часто бездумно смешиваем романтическую жизнь Галуа с его научным творчеством и часто же невольно пытаемся представить молодому читателю не настоящего Галуа, а такого, какого сами нарисовали в своем воображении. Романтика романтикой, но не следует забывать, что научное творчество — это труд, труд, о котором часто без преувеличений можно сказать, что он каторжный. Гений — это прилежание. Так говорил один из создателей Энциклопедии Бюффон. А великий изобретатель Томас Эдисон не уставал повторять, что во всяком изобретении лишь один процент вдохновения и девяносто девять процентов потения. И это при условии, что имеет место самое главное — способности и призвание к математике. В математике, как и во всякой иной науке, очень много романтики, но никогда не следует забывать о том, что изучение ее — это не сплошной праздник. Нет, часто — это самые прозаические будни, когда надо рано вставать, поздно ложиться, много считать и постоянно думать, думать и думать. Не всякому это по вкусу и не всякому это под силу. Одно дело смотреть на романтику таёжных исследований по телевидению в уюте городской квартиры и совсем другое — самому тащиться по тайге с тяжелым рюкзаком за плечами и тучами комаров над головой.

Романтика — прекрасная вещь. Она увлекает в надзвездные миры, она освобождает от мыслей о жизненной суете, она приподнимает, облагораживает мир окружающих вещей, но не мешает время от времени подправить ее трезвым и оценивающим взглядом, отделить в ней пшеницу от плевел...

Теория Галуа, как мы уже отметили выше, не имеет своей единственной целью установление условий, одновременно необходимых и достаточных для того, чтобы алгебраическое уравнение было разрешимо в квадратных радикалах. Это, если можно так выразиться, один из попутных вопросов, в ней решаемых. Главный же ее вопрос — каковы условия разрешимости алгебраического уравнения в радикалах вообще?

Для человека, не знакомого с предметом, этот вопрос может показаться странным — а разве не всякое алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах? Ведь квадратное уравнение (15) в радикалах решается, его корни находятся по формуле (16). Разве нельзя найти подобных формул и для произвольного уравнения (22)?

Оказывается, нельзя. Корни уравнения существуют, они представляют определенные функции от коэффициентов, но выразить эти функции через радикалы подобно тому, как это сделано для квадратного уравнения, можно далеко не для каждого уравнения. Подобные выражения смогут быть найдены для уравнений квадратного, кубического и четвертой степени, что же касается уравнений пятой и более высоких степеней, то для них это в общем случае оказывается невозможным. Однако до того, как это было осознано и доказано, прошло очень много времени, в течение которого пытались найти решение любого уравнения, улучшали алгебраическую символику, вводили новые математические понятия. История этих попыток с высшей степени интересна и поучительна и нисколько не уступает попыткам решения знаменитых задач древности. Наиболее интересные страницы этой истории приходятся на XVI ст. Откроем их.

Бурное время

...Италия! Эпоха Возрождения! Время, которое, по словам Энгельса, нуждалось в гигантах и породило гигантов учености, духа и характера.

Лишь несколько десятилетий отделяют раскрытую страницу от 1492 г., когда вдохновенный генуэзец[1], движимый неуёмной жаждой познания, становится на борт одной из трех каравелл, которых мы видели несколькими страницами раньше на беспредельной глади Атлантического океана, и после нескольких месяцев трудного плавания достигает берегов Америки. Еще меньше времени — от кругосветного плавания Магеллана. Корабль, единственный из пяти, отправившихся в плавание, преодолев тысячи тяжелейших преград, снова у берегов Испании, откуда он вышел три года назад. Корабль — жалкие обломки когда-то блестящей флотилии — причаливает к пирсу, но на его капитанском мостике нет бесстрашного адмирала[2]. Адмирал погиб на неведомых доселе островах. Позднее они были названы именем испанского короля Филиппа II.

Только-что закончилась блистательная эпопея в истории итальянского искусства, связанная с именами Рафаэля и Леонардо да Винчи, но еще продолжали создавать свои бессмертные творения Микеланджело и Тициан. Раскапываются античные скульптуры, изображающие человека во всем его неповторимом великолепии, во всей его телесной и духовной красоте, создаются философские трактаты и произведения художественной литера-

[1] Колумб

[2] Магеллан.

туры, в которых зло высмеивается канонизированная церковью схоластика, на протяжении сотен лет представлявшая собой прокрустово ложе для всякой свободной мысли. Новое захватывает почти все слои населения, новое воспринимается как залог освобождения от гнета, пришедшего из темных глубин средневековья, и в радостном и романтическом свете переживается, как настоящий праздник. Начинается возрождение наук, одной из которых является математика. Выводы математики обязательны для всех, она — владычица, она — законодательница, но к этим выводам она пришла не по своему полеизъявлению, а под влиянием жизненных потребностей, под влиянием практики. Царица одновременно оказывается и служанкой.

Полным непередаваемой романтики представляются эпизоды, связанные с открытием общего способа решения уравнений 3-й и 4-й степени.

Еще древние египтяне могли решать уравнения 1-й степени, т. е. уравнения вида:

$$ax + b = c, \tag{24}$$

где a, b, c — некоторые коэффициенты, x — неизвестное. Разумеется, ни о какой символике, которая позволяла бы записывать это уравнение в виде (24), не могло быть и речи. Египтяне словами формулировали правила, следуя которым, можно найти число, представлявшее на нашем языке корень уравнения (24).

Древние могли решать и квадратные уравнения:

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \tag{25}$$

и некоторые частного вида кубические уравнения (последние умели решать уже вавилоняне). Однако все попытки решить общее уравнение 3-й степени вида

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \tag{26}$$

успеха не имели. Причина, в частности, крылась в том, что до конца XVI — начала XVII ст. еще не была создана символическая алгебра, которая позволяла бы так экономно фиксировать математическую мысль, как это сделано, например, в уравнениях (24), (25), (26). Буквенная символика, как мы уже отмечали выше, появилась в конце XVI ст. До этого, сформулированные в неудобовоспринимаемой риторической форме, уравнения не давали никакого намека на способ их решения, и нужно было быть поистине виртуозом мысли, чтобы, удерживая в памяти множество разнородных вещей, привести их в такую систему, при которой сам собой напрашивался бы путь отыскания решения уравнения.

Итальянские математики первой половины и середины XVI ст., о которых пойдет наш рассказ, не располагали еще алгебраической символикой. Тем более должно вызвать восхищение то обстоятельство, что им все-таки удалось найти решение общих уравнений сначала 3-й, а затем и 4-й степени. Уравнения выше 4-й степени, как выяснилось позднее, в общем виде в радикалах решены быть не могут.

Заика и врач

Это случилось в Брешии во время нашествия французов в Италию в самом начале XVI ст. Никколо Тарталья был найден рядом со своим убитым отцом. Широкий палаш французского солдата, поразивший мужчину, задел и лицо ребенка. Перепуганный и травмированный мальчик, оказавшийся в гуще неслыханной резни и грабежа, впал в состояние шока, который наложил на него тяжелый отпечаток. Мальчик стал заикаться, и этот дефект, приносивший ему впоследствии столько огорчений, сохранился у него на всю жизнь.

Тарталья по-итальянски означает заика. Это прозвище было дано маленькому сироте и осталось за ним, как его собственное имя. Мало кто помнил его настоящее имя — Фонтана.

Трудно догадаться, какие обстоятельства пробудили у мальчика, лишенного правильного, систематического образования, и воспитания, страсть к математике. Может быть, это было врожденным? Мальчика все чаще и чаще стали заставать за занятием, которое, казалось бы, никак не соответствовало ни тому положению, которое он занимал, ни той работе, которую он выполнял.

Склонившись где-нибудь в глубине заброшенного кладбища над запыленной могильной плитой, он мог часами оставаться в глубокой задумчивости и выписывать непонятные для окружающих значки и числа. Элегическая тишина, густо разросшиеся туи и кипарисы, переплетенные пряно пахнущей повиликой, мерное щебетание одинокой пичужки — все это наводило на больное сердце подростка умиротворение и грусть. Сюда не долетал разноголосый рыночный шум, щелканье бичей погонщиков мулов, перебранка поссорившихся соседок на узких, кривых улочках города. Сама жизнь позаботилась о том, чтобы выработать в сироте ту способность к безграничной сосредоточенности, которая является условием всякой серьезной умственной работы.

Вскоре скепсис профанов, вызванный чудаковатыми увлечениями молодого заики, стал все более уступать место удивлению, а порой и невольному восхищению — Тарталья все чаще и чаще оказывался победителем в математических турнирах как со своими сверстниками, так и с людьми, намного более старшими, чем он. Через некоторое время за ним уже прочно утвердилась слава непревзойденного математика. Не было лишь повода, чтобы о молодом математике заговорила вся страна. Такой повод вскоре представился.

Некто Фиори, житель Болоньи, не сумевший стяжать себе известности ни на одном из поприщ, вдруг обнаружил у себя незаурядное математическое дарование и в 1535 г. объявил о вызове на состязание всякого, кто дерзнет противопоставить этому дарованию свое. В чем дело? Откуда такая самоуверенность у человека, дотоле совершенно неизвестного?

Такие вопросы задавал себе Тарталья, когда до него дошел этот вызов. Несколько дней размышлений, сопоставление фактов, и вот уже нарисована более или менее правдоподобная картина, объясняющая смелость невежды. Некоторое время назад умер известный профессор Болонского университета Сципион дель Ферро. Рассказывали, между прочим, что покойный профессор владел секретом решения общего уравнения 3-й степени. Во времена средневековья ученый не спешил делиться секретом, которым он владел, со всеми окружающими. Владение этим секретом ставило его в выгодные условия по отношению к другим. Он мог, например, вызывать на математические (если дело касалось математики) турниры всех желающих и, выходя победителем, приобретать славу непобедимого математика да, кроме того, получать и те призы, которые назначались победителю.

Задача об отыскании общего уравнения 3-й степени стояла тогда в центре математической проблематики, и если кто-то уверенно объявлял диспут, то сомнений быть не могло — тот, кто объявлял этот диспут, или полностью решил задачу, или сделал несколько существенных шагов на пути к ее решению. Узнав, что Фиори был близок к умершему профессору, Тарталья с поразительной и совершенно безошибочной прозорливостью заключил, что Сципион дель Ферро перед смертью сообщил своему знакомому способ решения уравнений 3-й степени.

Молодой математик приложил все старания к тому, чтобы разгадать секрет корня уравнения 3-й степени, и за несколько дней до диспута ему это удалось. Тарталье понадобилось всего два часа, чтобы решить все 30 задач, предложенных ему его противником, в то время как последний не справился ни с одной из задач Тартальи. Способ, найденный Тартальей, оказался намного лучше того, которым владел Фиори, и позволял решать и такие задачи, которые этому малограмотному математику оказывались не под силу. Конечно, это не был самый общий способ, который охватывал единой формулой все возможные частные случаи. Для Тартальи каждый из этих случаев представлял особую трудность, которую он старался преодолеть с помощью особого приема. Однако уже не требовалось больших усилий для того, чтобы перевести полученные результаты на язык современной нам алгебры и усмотреть в выводах математика необходимую общность.

Общее решение уравнений 3-й степени было найдено. Слава о Тарталье — непревзойденном математике — прокатилась по всей Италии и, в частности, достигла ушей всемирно известного врача и астролога Джеронимо Кардано.

Это был удивительный и неповторимый человек, истинное дитя своего времени. Мы его знаем как математика, автора знаменитой книги «Ars magna» («Великое искусство»), в которой содержится и приписываемый ему способ решения уравнения 3-й степени. Сам он, если судить по другой его книге «О моей жизни», математиком себя не считал, а свое истинное призвание видел в медицине. Ему удалось успешно излечить несколько высокопоставленных особ, в том числе и нескольких носителей высокой власти в ряде европейских государств, вследствие чего он стал одним из самых желанных гостей при дворах коронованных особ.

Поскольку средневековая медицина почти все свои положения основывала на астрологических и каббалистических «истинах», то не остался чуждым астрологии и Джеронимо Кардано. О нем, как о выдающемся астрологе, слагались легенды, одна из которых, в частности, гласит, что им был составлен гороскоп Христа. Это было расценено как святотатство, и виновнику грозило тяжелое церковное наказание (за подобные проступки в те времена сжигали на кострах). Надо полагать, что лишь заступничество высоких покровителей, пользовавшихся в своих нуждах услугами прославленнного врача и мага, спасло его от костра.

Согласно другой легенде, Кардано составил свой собственный гороскоп, в соответствии с которым предсказал день и час своей смерти. Рассказывают, что в тот именно день и час, снедаемый жаждой не уронить славы великого прорицателя, Кардано лишил себя жизни. Наверно, это уже вымысел, результат не в меру разыгравшегося воображения какого-либо сочинителя светских хроник.

Узнав о победе Тартальи, Кардано всеми правдами и неправдами постарался выведать у него его тайну. Долгое время ему это не удавалось — Тарталья еще не сумел извлечь из своего открытия всей возможной выгоды. Однако в конце концов последний не сумел устоять против планомерного и хорошо организованного натиска. Постепенно, где полунамеками, где с намеренно сгущенным туманом, Тарталья выдает Кардано свой секрет.

Каково же было негодование заики, когда спустя некоторое время он прочитывает в только-что вышедшей книге «Ars magna» (1545 г.) свой способ решения, снабженный, однако, примечанием, что этот способ был сообщен автору его высокочтимым другом Никколо Тартальей из Брешии. В соответствии с представлениями человека средних веков это было равносильно предательству, а приписка, касающаяся приоритета, воспринималась как неприкрытая издевка. Немедленно диспут, немедленно математический поединок, на котором он проучит этого зарвавшегося бессовестного нахала!

Диспут Площадь перед церковью святой Марии кипела, как потревоженный муравейник. Богато разодетые горожане, нищие в лохмотьях, солдаты с аркебузами — вся эта пестрая, разноликая, горланящая толпа была взволнована одним общим чувством. Взоры большинства были прикованы к еще неоткрытому порталу. На высоком деревянном щите, прислоненном к одному из двух фонарных столбов, находящихся перед входом, углем было написано сообщение о том, что в церкви святой богородицы ровно в пять часов начнется диспут между знаменитым Тартальей и прославленным лекарем Кардано.

Диспуты в средние века всегда представляли собой интересное зрелище, привлекавшее праздных горожан от мала до велика. Темы их носили разнообразнейший характер, но обязательно научный. При этом под наукой понимали то, что входило в перечень так называемых семи свободных искусств. Непременной частью этих искусств было, конечно, и богословие. Богословские диспуты были наиболее частыми. Спорили обо всем. Например, о том, приобщится ли мышь к духу святому, если съест причастие, могла ли Кумская сивилла предсказать рождение Иисуса Христа, почему братья и сестры спасителя не причислены к лику святых и т. д.

О споре, который должен был произойти между прославленным математиком и не менее прославленным врачом, высказывались лишь самые общие догадки, так как толком никто ничего не знал. Говорили, что один из них обманул другого (кто именно и кого именно, неизвестно). Почти все те, кто собрался на площади, имели о математике самые смутные представления, но каждый с нетерпением ожидал начала диспута. Это всегда было весело, всегда имелся повод потешиться над неудачником, независимо от того, прав он или не прав.

Когда часы на ратуше пробили пять раз, портал широко распахнулся, и толпа бросилась внутрь собора. По обе стороны от осевой линии, соединяющей вход с алтарем, у двух боковых колонн были воздвигнуты две высокие кафедры, предназначенные для спорщиков. Участников диспута еще не было. Присутствующие громко шумели, не обращая никакого внимания на то, что находились в церкви.

Наконец перед железной решеткой, отделявшей иконостас от остальной части центрального нефа, появился городской глашатай в черно-фиолетовом плаще и зычным голосом провозгласил:

«Достославные ломбардцы, граждане богоспасаемого города Милана! Сейчас перед вами выступит знаменитый математик Никколо Тарталья из Брешии. Его противником в диспуте должен был быть математик и врач Джеронимо Кардано. Никколо Тарталья обвиняет Кардано в том, что последний в своей книге «Ars magna» опубликовал способ решения уравнения 3-й степени, принадлежащий ему, Тарталье. Однако сам Кардано на сегодняшний диспут прийти не смог и прислал вместо себя своего ученика Луиджи Феррари. Итак, диспут объявляется открытым, участники его приглашаются на кафедры».

На левую от входа кафедру поднялся неловкий человек с горбатым носом и курчавой, кое-где тронутой проседью бородой. Левую щеку его перерезал шрам, один из концов которого прятался где-то на подбородке. У подножия остался его спутник, очень на него похожий, но чуть более высокий и чуть более спокойный в движениях.

На противоположную кафедру ленивой походкой взошел молодой человек двадцати с небольшим лет, с красивым самоуверенным лицом и покрытыми томной поволокой глазами. Во всей его манере держаться сказывалась полная уверенность в том, что каждый его жест и каждое его слово будут приняты с восторгом. Эта уверенность подкреплялась тем, что его кафедра была окружена плотным кольцом его многочисленных друзей и родичей, готовых при случае поддержать его аргументацию действиями, более энергичными, чем словесные хитросплетения. Скользнув по ним взглядом, Феррари остановил свой взор на своем бородатом, непривлекательном противнике.

Начал Тарталья.

— Уважаемые господа, жители города Милана, — голос его был хриплым и негромким, ему с трудом удавалось преодолевать заикание. — Уважаемые граждане Милана, вам известно, что 13 лет назад мне удалось найти способ решения уравнения 3-й степени и тогда я, пользуясь этим способом, одержал победу в диспуте с Фиори. Мой способ привлек внимание вашего согражданина Кардано и он, Кардано, приложил все свое хитроумное искусство, чтобы выведать у меня секрет. Он не остановился ни перед обманом, ни перед прямым подлогом. Вы знаете также, что три года назад в Нюрнберге вышла книга Кардано о правилах алгебры, где мой способ, так бессовестно у меня выкраденный, был сделан достоянием каждого.

Тарталья остановился, чтобы перевести дух. На лицах присутствующих он прочитал если не недоверие, то, что было еще хуже, явно насмешливое сочувствие к себе. Это еще более смутило его и он стал заикаться гораздо более мучительно, чем в начале своего выступления.

— Я вызвал Кардано и его ученика, которого вы видите сейчас перед собой, на состязание. Я предложил решить 31 задачу, столько же было предложено и мне моими противниками. Был определен срок для решения задач — 15 дней. Мне удалось за 7 дней решить бо́льшую часть тех задач, которые были составлены Кардано и Феррари. Я напечатал их и послал с курьером в Милан. Однако мне пришлось ждать целых пять месяцев, пока я получил ответы к своим задачам. И само по себе это было бы нарушением условия состязания, но я снисхожу к недостаточности математических знаний у моих противников и готов даже отказаться от этих условий, не рискуя остаться в проигрыше — задачи, присланные мне, решены неправильно. Это и дало мне основание вызвать обоих на публичный диспут, на котором вы, уважаемые граждане Милана, имеете честь присутствовать.

Тарталья замолчал и, вынув из-за широкого обшлага цветной фуляровый платок, дрожащей рукой вытер вспотевший лоб.

Молодой человек, сделав театральный жест правой рукой и со снисходительным высокомерием посмотрев на несчастного Тарталью, откинул назад гордо поднятую голову и произнес хорошо поставленным грассирующим баритоном:

— Уважаемые господа! Мой досточтимый противник позволил себе в первых же словах своего выступления высказать столько клеветы в мой адрес и в адрес моего учителя, его аргументация была столь голословной и непоследовательной, что мне едва ли доставит какой-либо труд опровергнуть первое и показать вам несостоятельность второго.

— Прежде всего, о каком обмане может идти речь, если Никколо Тарталья совершенно добровольно поделился своим способом с нами обоими? Вместе с тем, в тех случаях, когда полной откровенности с его стороны не было и когда он пытался ввести нас в заблуждение, зашифровав математическое правило в туманных и невразумительных стихах, то кто же станет отрицать, что человек, усмотревший за этой невразумительной тарабарщиной истину, является автором открытия в такой же мере, как и тот, кто пришел к этому открытию, не имея ни стихов, ни иных намеков на него?

— Мой противник проявил к тому же изрядную долю неблагородности, видя в нас лишь бессовестных воров, однако в книге «Великое искусство» мой учитель, совершенно не думая о своих собственных интересах, целиком приписал Тарталье честь открытия, на которое он сам имеет ничуть не меньшее право претендовать.

Феррари, засунув руку за пазуху, вытащил небольшую книжку, и, раскрыв ее, сказал:

— Вот как пишет Джеронимо Кардано о роли моего противника в открытии алгебраического правила. Он говорит, что не ему, Кардано, — Феррари повысил голос, давая понять тем самым, что дальнейшие слова он цитирует по книге, — «а моему другу Тарталье принадлежит честь открытия такого прекрасного и удивительного, превосходящего человеческое остроумие и все таланты человеческого духа. Это открытие есть поистине небесный дар, такое прекрасное доказательство силы ума, его постигнувшего, что уже ничто не может считаться для него недостижимым».

Тем же театральным жестом Феррари откинул со лба красивые вьющиеся волосы и продолжал:

— Мой противник, как вы все изволили слышать, обвинил меня и моего учителя в том, что мы будто бы дали неверное решение его задач. Мне хотелось бы, чтобы сеньор Тарталья объяснил, что это значит — неверное решение. Как может быть неверным корень уравнения, если, подставляя его в уравнение и выполняя все предписанные в этом уравнении действия, мы приходим к тождеству? И уж если сеньор Тарталья хочет быть совершенно последовательным, то он должен был бы ответить на замечание, почему мы, укравшие, по его словам, его изобретение и использовавшие это изобретение для решения предложенных им задач, получили неверный результат.

Значит, одно из двух — или результаты действительно не верны и тогда изобретение сеньора Тартальи — вовсе не изобретение, или они, эти результаты, верны.

Шум прошелся по рядам присутствующих. Слушатели стали оживленно переговариваться и бросать подбадривающие взгляды в сторону молодого человека и насмешливо-иронические — в сторону его неимпозантного противника.

Феррари продолжал:

— Мы — мой учитель и я — не считаем, однако, изобретение сеньора Тартальи маловажным. Это изобретение замечательно. Более того, я, опираясь в значительной мере на него, нашел способ решения уравнения 4-й степени, и в «Ars magna» мой учитель говорит об этом.

Феррари выразительным жестом указал на раскрытую книгу.

— Чего же хочет от нас сеньор Тарталья? Чего добивается он диспутом?

Шум в церкви усилился. С трудом герольду, повысившему свой мощный голос, удалось несколько умерить его.

— Господа, господа, — Тарталья не мог подыскать подходящих слов, — я прошу вас выслушать меня. Я не отрицаю того, что мой молодой противник очень силен в логике и красноречии. Но нельзя этой логикой и этим красноречием, апеллирующими скорее к чувствам, чем к разуму, заменить истинное математическое доказательство. Задачи, которые я дал Кардано и Феррари, решены неправильно, и я вам докажу это. Действительно, возьмем, например, уравнение из числа решавшихся. Оно, как известно...

В церкви поднялся невообразимый шум, поглотивший полностью окончание фразы, начатой незадачливым математиком. Больше всего шумели друзья Феррари. Из разноголосых выкриков, которые долетали до слуха Тартальи, он понял, что присутствующие требовали выбрать судей, которые были бы компетентны в математике и которые могли бы сказать, насколько прав Тарталья в своих возражениях.

— Господа,— напрягая последние силы, закричал Тарталья, — ни с каким выбором судей здесь, в Милане, я не согласен. Я никого здесь не знаю и заранее могу быть уверенным в том, что судейство будет предвзятым и необъективным.

Ему не дали продолжать. Толпа, зажигаясь все более и более, требовала от него, чтобы он замолчал и чтобы очередь была предоставлена Феррари.

Тарталья вынужден был отступить.

Получив слово, Феррари повел себя так, как если бы был не на диспуте, а в университетской аудитории. Он начал с азов механики и математики, внимательнейшим образом проанализировал труды Архимеда и Авиценны, он связал математические истины с истинами священного писания и, увлекшись сам и увлекая за собой других, настолько отошел от предмета спора, что никто из присутствующих, исключая разве лишь Тарталью, толком, и не знал, о чем в действительности идет спор.

Распаленная толпа бурными возгласами приветствовала окончание каждого периода в выступлении своего любимца. По адресу Тартальи неслись уже угрозы, и можно было догадываться, что лишь присутствие в святом месте удерживало наиболее рьяных сторонников Феррари от желания немедленно расправиться з заикой, дерзнувшим тут, в Милане, подвергнуть сомнению ученость двух наиболее почитаемых граждан.

Посмотрев на своего брата, стоявшего внизу и делавшего ему отчаянные знаки, видя, что продолжение спора совершенно бесполезно, Тарталья поспешно спустился с кафедры. Вдвоем они быстро прошли через неохотно расступавшуюся перед ними толпу и вышли через северный притвор на площадь. Сзади них бурными выкриками и хлопками толпа приветствовала «победителя» диспута Луиджи Феррари, «розового юношу с нежным голосом, веселым лицом, громадными способностями и характером дьявола», как писали о нем его современники.

Так закончился этот спор, который и сейчас, спустя 400 с лишним лет, продолжает вызывать все новые и новые споры. Кто был прав в том, первом споре, состоявшемся в 1548 г.? Кому в действительности принадлежит способ решения уравнения 3-й степени? Мы говорим сейчас — Никколо Тарталья. Он открыл, а Кардано выманил у него это открытие. И если сейчас мы называем формулу, представляющую корни уравнения 3-й степени через его коэффициенты, формулой Кардано, то это-де историческая несправедливость.

Однако несправедливость ли? Как подсчитать меру участия в открытии каждого из математиков?

Может быть со временем мы сможем ответить на этот вопрос совершенно точно. А может быть, это навсегда останется тайной...

Формула Кардано Если воспользоваться современным математическим языком и современной символикой, то вывод формулы Кардано может быть найден с помощью следующих, в высшей степени элементарных, соображений.

Пусть нам дано общее уравнение 3-й степени:

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0. \tag{27}$$

Если положить

$$x = y - \frac{b}{a},$$

то мы приведем уравнение (27) к виду

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \tag{28}$$

где

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}, \quad 2q = 2\frac{b^3}{a^3} - 3\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}.$$

Введем новое неизвестное u с помощью равенства

$$y = u - \frac{p}{u}.$$

Внося это выражение в (28), получим:

$$(u^3)^2 + 2qu^3 - p^3 = 0. \tag{29}$$

Отсюда

$$u^3 = -q \pm \sqrt{q^2 + p^3},$$

следовательно,

$$y = \sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2 + p^3}} - \frac{p}{\sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2 + p^3}}}.$$

Если числитель и знаменатель второго слагаемого умножить на выражение

$$\sqrt{-q \mp \sqrt{g^2 + p^3}}$$

и учесть, что получающееся в результате выражение для u оказывается симметричным относительно знаков «+» и «—», то окончательно получим

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Это и есть знаменитая формула Кардано. Если перейти от y вновь к x, то получим формулу, определяющую корень общего уравнения 3-й степени.

Молодой человек, так безжалостно обошедшийся с Тартальей, оказался способным не только к тому, чтобы произносить длинные и туманные речи. В математике он разбирался столь же легко, как и в нравах неприхотливой толпы. Прошло совсем немного времени с того момента, как Феррари узнал об общем способе решения уравнения 3-й степени, и он находит способ решения уравнения также и 4-й степени. Кардано поместил этот способ в свою книгу, как об этом заявил Феррари в своем споре с Тартальей.

Что же представляет собой этот способ?

Мы видели выше, что с помощью совсем несложной подстановки кубическое уравнение (28) можно привести к квадратному уравнению (29) относительно u^3. Совершенно естественно, что теперь Феррари ищет возможности привести общее уравнение 4-й степени к некоторому кубическому уравнению. Пусть

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0 \qquad (30)$$

— общее уравнение 4-й степени. Если положить

$$x=y-\frac{b}{a},$$

то уравнение (30) можно привести к виду

$$y^4+2py^2+2qy+r=0, \qquad (31)$$

где p, q, r — некоторые коэффициенты, зависящие от a, b, c, d, e. Легко видеть, что это уравнение можно записать в таком виде:

$$(y^2+p+t)^2=2ty^2-2qy+t^2+2pt+p^2-r. \qquad (32)$$

В самом деле, достаточно раскрыть скобки, тогда все члены, содержащие t, взаимно уничтожаются, и мы возвратимся к уравнению (31).

Выберем параметр t так, чтобы правая часть уравнения (32) была полным квадратом относительно y. Как известно, необходимым и достаточным условием этого является обращение в нуль дискриминанта из коэффициентов трехчлена (относительно y), стоящего справа:

$$q^2-2t(t^2+2t+p^2-r)=0. \qquad (33)$$

Это полное кубическое уравнение, которое мы уже можем решить. Найдем какой-либо его корень и внесем его в в уравнение (32), которое теперь примет вид

$$(y^2 + p + t)^2 = 2t\left(y - \frac{q}{2t}\right)^2.$$

Отсюда

$$y^2 \mp \sqrt{2t}\,y + p + t \pm \frac{q}{\sqrt{2t}} = 0.$$

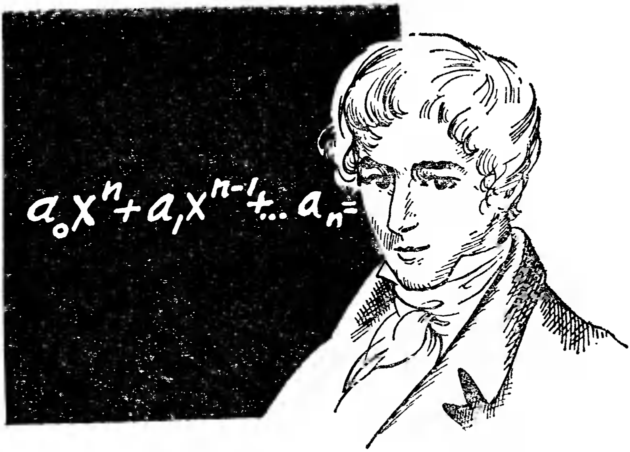
Это квадратное уравнение. Решив его, найдем корень уравнения (31), а следовательно, и (30).

Все оказывается очень простым, а между тем сколько драматических, а порой и комических событий сопутствовало этому открытию. Однако, каковы бы ни были эти события, они всегда останутся в нашей памяти как события, окруженные ореолом высокой романтики. Это была романтика поиска, романтика научного подвига, романтика такой же красоты и привлекательности, как и романтика кругосветных путешествий и географических открытий.

Уравнения 3-й и 4-й степени были решены. Корни таких уравнений, как и корни уравнений 1-й и 2-й степени, оказалось возможным выразить через коэффициенты этих уравнений с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корней соответствующей степени. Однако, вероятно, каждому показалось бы немыслимым курьезом, если бы кто-нибудь решил, что дальше уже делать нечего, что ничего уже искать не стоит и что уравнения выше 4-й степени не представляют интереса. Математик не был бы математиком, если бы, решив, наконец проблему корней уравнений 3-й и 4-й степени, не захотел бы узнать, а как решаются уравнения 5-й, 6-й и более высоких степеней.

Творческий процесс в математике сродни любому другому творческому процессу. Когда писатель начинает работать над художественным произведением, он часто лишь смутно представляет себе, как сложатся судьбы его героев. Но вот герои зажили собственной жизнью, и писатель, несмотря на все свое желание, не в силах помешать им, не в силах изменить эту жизнь.

То же и в математике. Очевидно, тот не математик, а если математик, то не творчески одержимый матема-



тик, кто не знает, к чему, к решению какой проблемы приложить свои силы. Взявшись за решение какой-либо задачи, математик-творец в известном смысле уже не властен над собой. Математика начинает вести его за собой, она сама ставит перед ним тысячи проблем, которые, тесно переплетаясь друг с другом, увеличиваются в числе с быстротой катящегося с горы снежного кома. Не следует думать, что такая математика оторвана от реальной жизни. Сама математика является порождением этой жизни, и если математика ведет за собой исследователя, то это означает, что ведет его за собой сама жизнь.

Памятник в королевском парке

В королевском парке в Осло высится памятник. На пьедестале, представляющем собой грубо отесанный параллелепипед, статуя молодого обнаженного, атлетически сложенного человека, попирающего обеими ногами две поверженные фигуры. Это — Абель. Что означают поверженные фигуры, знал, очевидно, лишь скульптор, изваявший их. Что же касается тех, кому доводилось видеть памятник, то каждый очевидно, по-своему толковал смысл и значение фигур. Может быть, это две наиболее важные проблемы, решенные Абелем — теория эллиптических функций и проблема решения алгебраических уравнений в радикалах? А может быть, это два наиболее коварных врага человека, побежденных молодым гением — смерть и забвение? Абель одолел и первого, и второго врага, обретя бессмертие в памяти грядущих поколений своими выдающимися открытиями.

Впрочем, богатая фантазия автора монумента может поставить в тупик не только неясным смыслом обеих низвергнутых фигур. Атлет, восседающий на пьедестале, лишь при очень живом воображении может быть уподоблен Абелю. Нет, не был Абель атлетом. И не было в его облике той непреклонной решимости, которая давала бы ему возможность преодолевать любые препятствия. На единственном дошедшем до нас портрете математика, сделанном во время его пребывания в Париже, мы видим очень милого, застенчивого юношу с располагающей к себе улыбкой и легкой копной мягких пепельно серых волос. Тяжелая болезнь (пневмония и скрытая форма туберкулеза) подточили и без того непрочное здоровье математика. Он умер в 26 лет 6 апреля 1829 г.

Поля, группы, расширения

Об одних открытиях Абеля, например тех, что связаны с эллиптическими функциями и эллиптическими интегралами, говорить трудно — слишком много понадобилось бы определений и пояснений для того, чтобы основная суть его результатов могла быть изложена убедительно. О других, связанных с доказательством невозможности решения в радикалах общего уравнения выше 4-й степени, попытаемся рассказать, но лишь в самых общих чертах.

Пусть нам дано самое общее алгебраическое уравнение, степень которого больше четырех:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad n \geqslant 5. \tag{34}$$

Как показал К. Ф. Гаусс, выдающийся немецкий математик XVIII—XIX ст., это уравнение имеет n корней, которые могут быть действительными, мнимыми, совпадающими или различными.

Предполагая, что корни уравнения (34) различны, мы должны считать совершенно произвольными и его коэффициенты.

Назовем *полем* такое множество P чисел, которое обладает следующими свойствами:

1) если $a \in P$ и $b \in P$, то $a+b \in P$ и $ab \in P$;

2) если $a \in P$, то $-a \in P$ и $a^{-1} \in P$ (при $a \neq 0$).

Пусть P — некоторое поле. Извлечем из всех чисел этого поля квадратные корни, присоединим к полю все такие корни, а также все те числа, которые получаются из расширенного таким образом множества путем многократного использования операций сложения, вычитания, умножения и деления (исключая деление на нуль). Мы получим новое поле, которое называется *радикальным расширением* поля P. Аналогично можно получить радикальное расширение, беря кубические корни (радикалы), корни (радикалы) четвертого порядка и т. д.

Пусть теперь нам дано некоторое уравнение (34), коэффициенты которого принадлежат полю P. Пусть это уравнение имеет корень, который выражается в радикалах. Это означает, что такой корень принадлежит полю, получающемуся из поля P в результате последовательности радикальных расширений, причем каждое последующее расширение получается из поля, к которому приходят в результате предыдущих расширений. Рассматривая эти поля, мы обнаруживаем их связь с такими очень важными понятиями современной алгебры, как понятия группы, ее нормального делителя и фактор-группы.

Пусть имеем совокупность Ω элементов произвольной природы $a, b, c, \ldots$ Пусть с каждой парой элементов a, b этой совокупности, взятых в определенном порядке, связывается некоторый элемент, который мы назовем *произведением* элементов a, b и обозначим ab. В общем случае $ab \neq ba$.

Совокупность Ω называется *группой* тогда и только тогда, когда выполнены следующие четыре условия (аксиомы группы):

1. Произведение двух элементов совокупности Ω принадлежит этой же совокупности: $ab=c$.

2. Справедлив ассоциативный закон: $(ab)c=a(bc)$.

3. К числу элементов совокупности принадлежит единица группы, т. е. такой элемент e, что для каждого элемента совокупности a справедливо равенство $ae=a$.

4. Для каждого элемента $a \in \Omega$ существует элемент $a^{-1} \in \Omega$ (обратный элемент), такой, что $aa^{-1}=e$.

Если для каждой пары элементов a, b группы выполняется равенство $ab=ba$, то группа называется *коммутативной* или *абелевой*.

Если часть элементов группы в свою очередь является группой с той же операцией умножения, то эта часть называется *подгруппой* данной группы.

Группа называется *циклической,* если каждый элемент ее является последовательной степенью, т. е. произведением самого на себя соответствующее число раз какого-либо одного ее элемента (образующего).

Пусть G — группа и H — некоторая ее подгруппа. Пусть $g \in G$ — некоторый фиксированный элемент и $h \in H$ — произвольный элемент подгруппы. Совокупность всех элементов вида gh, где g фиксировано, а h пробегает всю подгруппу, называется *левым классом смежности* по подгруппе H. Обозначим его через gH. Аналогично можно получить правый класс смежности Hg как совокупность элементов вида hg. В общем случае левый и правый классы не совпадают друг с другом, $gH \neq Hg$. Если же для любого g справедливо равенство $gH = Hg$ (хотя, вообще говоря, $gh \neq hg$), то подгруппа H называется *нормальным делителем* группы G.

Если перемножить два класса смежности (т. е. перемножить все их элементы), то получается класс смежности. При этом выполняются все групповые аксиомы, роль единицы группы играет сам нормальный делитель. Получается новая группа, элементами которой являются классы смежности. Эта группа называется *фактор-группой* группы G по нормальному делителю H и обозначается символом G/H.

Легко понять, что каждое поле является группой, в которой операцией умножения является обычное умножение чисел поля. Группой является и радикальное расширение поля. Само поле является нормальным делителем своего радикального расширения, а фактор-группа по этому делителю — абелева и циклическая.

Если алгебраическое уравнение решается в радикалах, то существует последовательность радикальных расширений, а потому и последовательность подгрупп, начиная с группы G, т. е. с самого последнего радикального расширения, и кончая единицей группы, т. е. в данном случае полем P:

$$G, H_1, H_2, \cdots, e.$$

Введем теперь важное понятие группы Галуа. Пусть имеется некоторое радикальное расширение K поля P. Рассмотрим всевозможные *автоморфизмы* поля K, т. е.

такие отображения элементов поля в элементы этого же поля, при котором сумма двух элементов переходит в сумму, а произведение — в произведение. Если при этом элементы поля P переходят сами в себя, то автоморфизмы называются *автоморфизмами над полем* P. Совокупность всех автоморфизмов является группой, которая и называется *группой Галуа поля* K *над полем* P. Она обозначается символом $G(K, P)$.

Группа Галуа переводит каждый корень уравнения, разрешимого в радикалах, в корень этого же уравнения. Если корни уравнения различны (следовательно, коэффициенты уравнения (34) произвольны), то преобразование, которое совокупность из n корней переводит в эту же совокупность, называется *подстановкой*. Считая корни пронумерованными, такую подстановку можно обозначить символом

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_2 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix},$$

где $i_1, \ldots, i_n$—те же натуральные числа $1, \ldots, n$, но взятые, вообще говоря, в каком-то ином порядке. Совокупность всех подстановок из n элементов является группой, которая называется *симметрической*. Число элементов в ней равно $n!$.

Пусть имеется последовательность радикальных расширений поля P:

$$P = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{i-1} \subset L_i \subset \cdots \subset L_s = K, \qquad (35)$$

где символ $\subset$ означает включение, т. е. в данном случае то, что каждое поле является подполем последующего поля. Каждое поле является радикальным расширением предыдущего поля.

С каждым подполем свяжем группу Галуа:

$$H_i = G(K, L_i).$$

В таком случае ряду подполей (35) будет соответствовать ряд подгрупп:

$$G(K, P) = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_{i-1} \supset H_i \supset \cdots \supset H_s = e. \quad (36)$$

Символ $\supset$ означает, что каждая группа является подгруппой предыдущей. Более того, в данном случае эта подгруппа является нормальным делителем предыдущей группы, а каждая фактор-группа H_{i-1}/H_i является абелевой и циклической.

При наличии цепочки (36) говорят, что группа $G(K, P)$ *разрешима.* Если цепочка (36) возможна лишь при $s=1$, то группа называется *простой*, или *неразрешимой.*

Итак, если алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах, то соответствующая ему группа Галуа разрешима. Справедливо и обратное: если группа Галуа разрешима, то алгебраическое уравнение с этой группой разрешимо в радикалах.

Для доказательства невозможности решения общего алгебраического уравнения в радикалах достаточно убедиться в том, что соответствующая уравнению группа Галуа неразрешима. При этом, поскольку уравнение общее, т. е. его коэффициенты произвольны, то вместо группы Галуа можно взять соответствующую группу подстановок из n элементов, где n — степень уравнения.

При $n \leqslant 4$ каждая группа подстановок разрешима, а это означает, что алгебраические уравнения степени не выше 4-й разрешимы в радикалах. Их решения, как мы знаем, были найдены в результате долгих поисков. Существуют и иные способы отыскания этих решений — с помощью построения так называемых *резольвент Лагранжа,* однако мы этого сейчас описывать не станем.

При $n \geqslant 5$ группы подстановок оказываются неразрешимыми, а это означает, что общие алгебраические уравнения выше четвертой степени в радикалах не решаются.

Эта теорема была доказана Абелем в то время, когда ему было всего около 22-х лет. Однако схема его рассуждений была отличной от той, которую мы только что воспроизвели и которая целиком вписывается в созданную некоторое время спустя теорию Галуа. Идея Абеля заключалась в том, чтобы доказать невозможность обращения в тождество уравнения выше 4-й степени, если вместо неизвестного в него подставить выражение, составленное из коэффициентов с помощью операций сложения, умножения, вычитания, деления и извлечения корней.

Рассуждения Абеля не носили той общности, которая была присуща теории Галуа. Опираясь на эту общность, Галуа сумел не только повторить результат Абеля, но и пойти намного дальше его. Теорема Абеля оказалась в известном смысле побочным результатом в исследованиях Галуа. Теория Галуа позволила доказать не только неразрешимость в радикалах общего уравнения выше 4-й степени, но и указать условия такой разрешимости для уравнений, не являющихся общими.

Надо ли говорить, что создание теории Галуа — не последнее слово в математике. Эта теория породила множество других задач, над решением которых математики работают и в наше время. О значении их работ может свидетельствовать то, что за некоторые из них были присуждены самые высокие премии в нашей стране.

Дремлющие силы

Но как бы далеко ни шагнула вперед математика, благодарная человеческая память навсегда сохранит воспоминания о двух прекрасных юношах — Абеле и Галуа, чья трагическая судьба будет всегда будить в нас самое живое и искреннее сочувствие, а могучий и светлый ум — самое глубокое восхищение.

Великие силы заложены в человеческом уме. Велики и те силы, которые дают возможность представить мир в виде математически организованной системы. Способность математически мыслить присуща каждому человеку, но у одного она может быть большей, у другого меньшей. Эта способность часто представляет собой дремлющую силу, которую надо уметь разбудить. И тогда она будет творить чудеса.

Рассказывают, что однажды спартанцы, теснимые врагами, изнемогали в жестокой, неравной борьбе. Силы таяли с каждым днем, сопротивление ослабевало, казалось, еще немного — и все будет кончено: торжествующий враг ворвется в лагерь, и последние его защитники падут на омытую кровью священную землю своих предков.

Когда надежды на спасение не было никакой, вспомнили осажденные о своих братьях по крови афинянах. Ссорились часто Афины и Лакедемон, часто не могли найти общего языка. Но не время ли забыть распри перед лицом опасного и коварного врага? Падет Лакедемон — падут и Афины, и навсегда отойдет в область предания славная Эллада.

Ночью бесстрашный воин ужом прополз сквозь вражеские заграждения, летучей мышью перелетел над глубокими рвами, нимфой-дриадой проплыл через быстрые горные речки и утром был у афинян.

Но какая же горечь наполнила сердца спартанцев, когда вместо когорты сильных и здоровых воинов они увидели хромого тщедушного старика. Поначалу решили, что это злая и неумная шутка.

Однако это не было шуткой. Посланным оказался замечательный поэт Тиртей, от слов которого загорались сердца у всех кто его слушал. Так случилось и сейчас. Силы, которые просили спартанцы у афинян, были в них самих, но то были дремлющие силы. Их надо было разбудить.

Это и сделало слово поэта. Слово налило неукротимой отвагой мускулы воинов, оно воспламенило их души. Это уже не были сломленные неудачами страдальцы. Казалось, что фаланга сошедших с небес богов предстала перед вдохновенным трибуном. С удесятеренной энергией бросаются воины на врага и выбрасывают его за пределы родной земли.

Так же и в наши дни. И пусть не покажется преувеличением, если мы скажем, что великие духовные силы способна пробудить в человеке и математическая проблема, четко поставленная и математически захватывающая. Одной из таких проблем оказалась та, о которой мы рассказали в нашей книжке — проблема решения великих задач. Началась эта проблема, казалось бы, с пустяка, а привела к результатам, которые составляют славу и гордость нашей математики. Пустяковость ее оказалась мнимой, в действительности же это была небычайно трудная, а потому и необычайно перспективная и привлекательная проблема...

Дерзать, дерзать... Дорогие друзья! Беритесь за решение трудных математических задач! И тех, которые только что поставлены, и тех, которые уже многие десятилетия или столетия не поддаются решению. Вас будут ожидать страдания, вы будете разочарованы, когда вам будет казаться, что вы напрасно потратили годы на поиски ускользающего от вас призрака. Все может быть. Но вы будете сторицей вознаграждены, когда в один прекрасный день окажетесь перед той заветной целью, к которой так долго и так трудно шли. Не будьте безучастными и равнодушными, в противном случае это будет духовная смерть.

Мы начали нашу книжку словами Данте о беспредельной жажде познания, с которой должен жить человек. Приведем еще один отрывок из того же дантовского «Ада». Вы помните, как Данте, ведомый древнеримским поэтом Вергилием, вдруг слышит стоны многих душ и просит своего проводника объяснить ему, чьи это стоны и какова вина стонущих:

И я с главою, ужасом склоненной,
«Чей это стон? — едва спросить посмел,
— Какой толпы, страданьем побежденной?»
И вождь в ответ — «То — горестный удел
Тех жалких душ, что прожили не зная
Ни славы, ни позора смертных дел.
От них и суд, и правда отошли.
И эта жизнь настолько нестерпима,
Что все другое было б легче им.
Они не стоят слов. Взгляни — и мимо».

Взгляни — и мимо!

А вот, к примеру, три эпизода, мимо которых никак нельзя пройти равнодушными. Мы взяли их наугад из истории математики, густо насыщенной такими эпизодами — героическими и драматическими, исполненными высокого пафоса и гражданского мужества, а нередко забавными и курьезными.

...— Вот она, хватайте ее! — архиепископ Кирилл властным жестом указал на паланкин, в котором возлежала молодая, красивая женщина.

Толпа, окружавшая архиепископа, с диким ревом бросилась на паланкин. Четверо рослых нубийцев — носильщиков были вмиг опрокинуты и десятки грязных, грубых рук протянулись к женщине.

— Сюда ее, сюда! — продолжал неистовствовать Кирилл. — Тащи ее, проклятую чернокнижницу и язычницу!

Гипатия тщетно пыталась прикрыть свою голову от ударов обезумевших христиан. Схватив ее за волосы, звероподобный фракиец растолкал ударами своей сокрушающей руки толпу и поволок несчастную женщину к тому месту, где стоял Кирилл. Бросив ее перед архиепископом, он стал рядом с ней, широко расставив ноги и скрестив на груди руки, готовый уничтожить каждого, кто посмел бы прийти к ней на помощь.

— Братья мои во Христе! — зычным голосом закричал Кирилл, стараясь перекрыть им шум возбужденной толпы. — Возлюбленные братья мои! Эта мерзкая язычница не признала учения нашего божественного учителя. Много лет проповедует она богопротивные догматы математики и философии, много лет льет она ядовитое зелье в дело нашей святой христианской церкви! Пришла пора рассчитаться с нечестивицей! Убить исчадие геенны! Очистить наш богоспасаемый город от скверны греха и словоблудия!

Звериный рев потряс площадь. Оборванные, грязные, десятки лет не мытые и не чесаные пустынники, утратившие во славу Христа человеческий разум, ринулись на женщину...

Это случилось в Александрии в 415 году. Гипатия Александрийская была первой известной нам женщиной-математиком. Она была растерзана толпой фанатиков-христиан по наущению архиепископа Кирилла за то, что, не убоявшись угроз, продолжала преподавать в Александрийском музее философию и математику, одновременно комментируя труды своих великих предшественников.

...Жителей Сиракуз трудно было удивить неожиданностями. Но то, что случилось в жаркий полдень в лето... от первой олимпиады, не оставило равнодушными даже их, привыкших ко всему относиться с таким же спокойствием, с каким обитатели Олимпа проводят свои бесконечные и исполненные дремучей безмятежности дни. По главной улице города, по раскаленным от жаркого солнца плитам мостовой, высоко задирая кверху бороду, бежал старик и с восторгом выкрикивал одно и то же слово: «Эврика!», «Эврика!». Старик был почти совершенно гол, бурая пена пятнами покрывала его спину и время от времени падала наземь, сорванная быстрым и резким движением.

Вслед за стариком бежала орава ребятишек, создавая шум, который был слышен на морском берегу. На этот шум с разных сторон сбегались праздные сиракузцы. Часть из них устремлялась вслед за мальчишками, часть же с недоумением глазела на это забавное зрелище, оставаясь на месте и пытаясь у таких же зевак выяснить причину переполоха.

Бег закончился перед домом Гиерона. Бежавший впереди старик остановился перед высоким крыльцом, отдышался и, приняв немножко театральную позу, произнес торжественным голосом:

— Царь! Эврика! Я узнал, сколько золота содержится в короне.

Никто не отозвался.

— Царь! — повысил голос старик. — Я нашел способ узнать, обманул тебя ювелир или нет.

Снова никакого ответа. В толпе загудели. Кто-то пытался выяснить, кто этот странный старик и откуда он появился. Ему отвечали, говоря, что видели старика несколько дней назад на морском берегу чертившим на песке какие-то хитроумные фигуры. Высказали догадку, что это, наверно, тот самый, который несколько дней назад приплыл вместе с Гелоном из Агригента, что это какой-то родственник Гиерона. Предлагали послать за Гиероном, которого видели на пристани, у четырех больших трирем, прибывших из Карфагена.

Плешивый горшечник из тупика, что примыкает с восточной стороны к агоре, высказал предположение, что старика, кажется, зовут Архимедом. Так именно назвал его Гиерон, когда они беседовали два дня назад у большого гномона на городской площади. Несколько голосов немедленно подтвердили это...

Это случилось в III в. до н. э. Говорят, что примерно так вел себя Архимед, когда открыл свой знаменитый закон о погружении тел в жидкость.

...Работа была трудной. Даже для него, привыкшего считать безделками такие дела, перед которыми другие в бессилии опускали руки. Цифры, цифры, цифры... Колонки цифр, страницы цифр, стопки исписанных страниц. Выкладки и еще выкладки...

Стенные часы пробили половину третьего. Их удар, раздавшийся в ночной тиши, заставил вздрогнуть так же, как и выстрел крепостной пушки в полдень. Эйлер встал из-за стола. Комната была погружена во мрак. Свет единственной свечи, стоявшей на столе и заботливо прикрытой бумажным абажуром, освещал лишь небольшой заваленный бумагами круг.

Несколько шагов по мягкому ковру, несколько взмахов руками. Глубокий транс, вызванный изнурительной, многочасовой работой, не проходил. Ломило грудь, ныла поясница, несколько раз мучительно резко потянуло в глазу. Откуда такие немощи? Это в двадцать-то восемь лет!

На какой-то миг пронзительно захотелось бросить всё и залечь сурком в теплую, мягкую постель. И отоспаться за все долгие-долгие бессонные ночи. Но это невозможно. Его честь, честь ученого, поставлена на карту. Надо за трое суток выполнить важное правительственное задание, выполнить во что бы то ни стало. Трудно сказать, почему он так опрометчиво взял это обязательство. Просили же другие несколько месяцев!

Работа и вправду оказалась трудной. Но в то же время и чрезвычайно захватывающей. Настолько захватывающей, что математик, забывая сон и еду, весь отдавался во власть чарующей гармонии строгих и последовательных зависимостей.

Эйлер потер глаз ладонью. Боль, кажется, немножко утихла.

И снова цифры, формулы, цифры... Эйлер размышляет. Это — его жизнь. Без наслаждения музыкой математики она не имела бы смысла. Как хорошо сказал кто-то из старых геометров — жизнь хороша тем, что в ней можно заниматься математикой. Как бы порой и не хотелось бросить все и не думать о гвоздем засевших в голове вопросах...

Работа была окончена в срок. Но оставила после себя страшный, чудовищный след — глаз, его правый глаз, так мучительно нывший в последнее время, не выдержал сверхчеловеческого напряжения и вытек. Двадцатидевятилетний математик стал кривым. Но не перестал вычислять. А когда вычислять стало уже нельзя, прекратилась и жизнь. После его смерти сказали так: Эйлер перестал вычислять и жить. Именно так — вычислять, а потому и жить.

Это был один из величайших математиков всех времен. Родился он в самом начале XVIII в. в Швейцарии, но почти половину своей долгой жизни прожил в России. Здесь он умер, здесь и покоится его прах. Мы по праву называем Эйлера отечественным математиком.

Итак, одну терзают разъяренные христиане, другой забылся до того, что, выскочив из ванны, побежал по улице почти в чем мать родила, третий от чрезмерного напряжения теряет свой глаз... Так, может быть, не стоит заниматься наукой, результатом которой оказывается одно зло? А, может быть, стоит ею заниматься, если даже ни жестокие страдания, ни насмешки обывателей, ни даже смерть не способны отвратить от нее её благородных, её бескорыстных, её самоотверженных жрецов? Да, наверно, так. Иначе зачем было бы Гипатии восставать против всесильного Кирилла, зачем Архимеду пренебрегать элементарными правилами «благопристойности», Эйлеру — преодолевать мучительную боль, чтобы выполнить очень важные и очень ответственные расчеты?

Математика — это орудие, с помощью которого человек познаёт и покоряет себе окружающий его мир. Но это — особое орудие. Оно покоряет не только внешний мир, оно властно подчиняет себе и того, кто за него берется. А подчинив, оно не остановит его перед тем, чтобы принести во имя науки любые жертвы, которые она от него потребует.

Чтобы сделать в математике что-то действительно ценное, надо любить, ее так, как любил ее каждый из трех упомянутых нами математиков, как любили ее десятки и сотни других ее ревнителей. Не спорьте с безумствующими архиепископами, не бегайте голыми по улицам, не жертвуйте своими глазами во имя науки, но сделайте хотя бы малую часть того, что сделал каждый из них, и мир навсегда останется благодарным вам.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Агора — площадь в древнегреческом городе, место народных собраний.

Галс — курс судна.

Гелиос — бог солнца у древних греков.

Демос — собирательное название народа у древних греков.

Делос — остров в Эгейском море, на котором находился храм бога Аполлона. Жрица этого храма Пифия под влиянием тлетворных испарений, исходящих из расположенной неподалеку от храма пещеры, впадала в бессознательное состояние, во время которого производила бредовые выкрики. Эти выкрики истолковывались как «глас божий».

Иезуиты — члены монашеского ордена, основанного испанским монахом Игнатием Лойолой в 1534 г. Для достижения своих целей иезуиты не брезговали никакими средствами. Орден иезуитов — один из самых реакционных монашеских орденов.

Лакедемон — другое название Спарты, аристократического рабовладельческого государства в древней Греции.

Лапландия — территория на севере Финляндии.

Ломбардия — область на северо-западе Италии с главным городом Миланом.

Лопарь — представитель народности, населяющей северо-восточную часть Норвегии, север Швеции и север Финляндии. Иное название — лапландец, саами.

Лорето — город в Италии, славящийся как место паломничества к так называемой лоретской божьей матери.

Миазмы — вредные испарения.

Мушкет — ручное огнестрельное ружье с фитильным замком.

Ойкумена (Эйкумена) — по представлению древних греков, совокупность тех областей земной поверхности (главным образом, в бассейне Средиземного моря), которые заселены человеком.

Оракул — а) жрец, передающий ответы бога верующим, б) место, где происходили «прорицания».

Плевелы — род сорняка.

Полиспаст — система блоков для поднятия тяжестей

Политехническая школа — высшее учебное заведение в Париже, созданное во время Французской буржуазной революции 1789—1793 г. Школа готовила инженеров для занятия технических государственных должностей.

Портал — парадный вход в общественное здание.

Прагматизм — область буржуазной философии, признающая истиной лишь то, что практически полезно.

Ратуша — *здание городского управления.*

Румб — одно из 32 делений компаса.

Сивилла — прорицательница в древнем Риме.

Тридцатилетняя война (1618—1648) — первая общеевропейская война, в которой сражались два военных блока: Испания, Австрия, Германия, Польша — с одной стороны, Дания, Швеция, Франция — с другой.

Турень — провинция на западе Франции, расположенная в бассейне р. Луары.

Триады — три чем-либо связанных лица, предмета, понятия. Триада (триады) Менехма — конические сечения, которые впоследствии, у Аполлония Пергского, получили название эллипса, гиперболы и параболы.

Фрисландия — историческая область на побережье Северного моря, провинция современных Нидерландов.

Фуляр — тонкая шелковая ткань.

Швабия — историческая область в Германии.

Шкипер — командир коммерческого судна.

Штатгальтер (в Нидерландах XVI—XVII ст.) — титул носителя верховной власти.

Энциклопедия — коллективный труд группы французских ученых и писателей, возглавляемой Д. Дидро. В состав этой группы входили Ж. Даламбер, Ш. Монтескье, Ф. Вольтер, Ж. Ж. Руссо и др. Полное название труда — «Энциклопедия или толковый словарь наук, искусств и ремесел».

ЛИТЕРАТУРА

Арманд Д. Как измерили землю. М.—Л., Детгиз, 1941.

Веселовский И. Н. Архимед. М., Учпедгиз, 1957.

Гарднер М. Математические досуги. М., «Мир», 1972.

Дальма А. Эварист Галуа — революционер и математик. М., Физматгиз, 1960.

Депман І. Я. Розповіді про математику. К., «Радянська школа», 1957.

Инфельд Л. Эварист Галуа — избранник богов. М., «Мол. гвардия», 1966.

Каган В. Ф. Архимед. М, Гостехиздат, 1951.

Кудрявцев П. С. Исаак Ньютон. М., Учпедгиз, 1955.

Оре О. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. М., Физматгиз, 1961.

Смогоржевський О. С. Метод координат. К., «Радянська школа», 1954.

Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. М., Учпедгиз, 1963.

Шереметевский В. П. Очерки по истории математики. М., Учпедгиз, 1940.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Библиотечка физико-математической школы
Математика

Николай Иванович Кованцов

МАТЕМАТИКА И РОМАНТИКА

Издательское объединение «Вища школа»
Головное издательство

Редактор Л. И. Ващенко
Литредактор А. П. Ковальчук
Обложка художника Е. В. Попова
Художественный редактор И. Р. Ойхман
Технический редактор И. И. Каткова
Корректор А. И. Кирова

Сдано в набор 29. 04. 1976 г. Подписано к печати 26. 08. 1976 г. Формат бумаги $84\times108^1/_{32}$. Бумага тип. № 1. Физ. печ. л. 3. Усл. печ. л. 5,04. Уч.-изд. л. 4,85. Тираж 55 000. Изд. № 3127. БФ 16454. Цена 17 коп. Зак. № 209.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа», 252054, Киев, 54, Гоголевская, 7.

Белоцерковская книжная фабрика республиканского производственного объединения «Поліграфкнига» Государственного комитета Совета Министров УССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, ул. К. Маркса, 4.